__dem th 2__ On suppose que E est de dimension finie. Il existe donc $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ famille de vecteurs de E telle que $E = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

__but__ Mq E possède au moins une base.

On va décrire un algorithme qui va permettre d'extraire de la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une sous-famille $\mathcal{B}$ qui sera une base de E.

Cet algorithme pourra être utilisé dans les exercices.

L'algorithme est très simple.

__Initialisation__ $\mathcal{B} \overset{def}{=} (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$

__Boucle tant que__

Tant que $\mathcal{B}$ est __liée__ :

on extrait de $\mathcal{B}$ un vecteur qui est CL des autres [il en existe un d'après le th 26 du chap 13]

__Sortie__ On renvoit la famille $\mathcal{B}$.

Dans l'initialisation : $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}) = E$

Dans la boucle $\mathcal{B}$ est réduite pas à pas d'un vecteur mais en conservant $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ grâce au principe de réduction d'une famille génératrice [th 22 du chap 13].

Donc en sortie de boucle on a $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Et comme on est sorti de la boucle : $\mathcal{B}$ est libre.

<u>$\mathcal{B}$ est donc une base de E</u>.

Il reste à prouver que la boucle se termine (ie qu'elle n'est pas infinie). C'est évident : on enlève à chaque fois un vecteur dans une famille <u>finie</u> de p vecteurs. On ne peut le faire au maximum que p fois.

<u>Exemples 1</u> : • $E = \text{Vect}\left((X-1)^2, X^2, -2X+1 \right)$

donc la famille $B = \left(\overset{P_1}{(X-1)^2}, \overset{P_2}{X^2}, \overset{P_3}{-2X+1} \right)$ est génératrice de E

Est-elle libre ? Non car $P_1 = P_2 + P_3$

Par principe de réduction d'une famille génératrice la nouvelle famille $B = (P_2, P_3)$ est aussi génératrice de E ie $E = \text{Vect}(P_2, P_3)$.

Est-elle libre ? oui car P_2 et P_3 sont non colinéaires / proportionnels

Donc $\boxed{B = (P_2, P_3) \text{ est une base de } E}$

• $E = \text{Vect}\left(\underset{\vec{u_1}}{(1,0)} ; \underset{\vec{u_2}}{(1,1)} ; \underset{\vec{u_3}}{(0,2)} \right)$

Même raisonnement : comme $2\vec{u_2} = 2\vec{u_1} + \vec{u_3}$

on a $E = \text{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_3})$

$(\vec{u_1}, \vec{u_3})$ est libre car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_3}$ sont non colinéaires

Donc $\boxed{B = (\vec{u_1}, \vec{u_3}) \text{ est une base de } E.}$

dem Th 4 On suppose que E est engendré par n vecteurs. D'après le cor 3 on peut en extraire $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ base de E avec $\boxed{p \leq n}$

Donc $E = \text{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_n})$.

On se donne $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_{n+1}})$ une famille qcq de $n+1$ vecteurs.

but mq cette famille est liée.

On va donc montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k . \vec{v_k} = \vec{0_E}$$

Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$ on a $\vec{v_k} \in E$

et $E = \text{Vect}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ donc il existe des scalaires $\alpha_{k,1}, \alpha_{k,2}, \dots, \alpha_{k,p}$ tels que

$$\vec{v_k} = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j} \vec{u_j}$$

L'équation $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k . \vec{v_k} = \vec{0_E}$ d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$

se réécrit $$\sum_{k=1}^{n+1} d_k \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{k,j} \cdot \vec{u_j} \right) = \vec{0_E}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{j=1}^{p} d_k \times \alpha_{k,j} \cdot \vec{u_j} \right) = \vec{0_E}$$

$$\overset{\text{Fubini}}{\Longleftrightarrow} \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n+1} d_k \times \alpha_{k,j} \cdot \vec{u_j} \right) = \vec{0_E}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n+1} d_k \times \alpha_{k,j} \right) \cdot \vec{u_j} = \vec{0_E}$$

$$\Longleftrightarrow \forall j \in [\![1,p]\!], \quad \sum_{k=1}^{n+1} d_k \times \alpha_{k,j} = 0$$

car la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ est libre (c'est une base)

On a donc le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha_{1,1} d_1 + \alpha_{2,1} d_2 + \dots + \alpha_{n+1,1} d_{n+1} = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{1,p} d_1 + \alpha_{2,p} d_2 + \dots + \alpha_{n+1,p} d_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Il est homogène donc compatible.

Comme il a $n+1$ inconnues et p équations

avec $p < n+1$ (puisque $p \leq n$) on sait d'après

le chapitre sur les systèmes linéaires qu'il a une

infinité de solutions et en particulier
on peut avoir $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ non tous nuls.

dem cor 5

On suppose que $\mathbb{E}$ admet des familles libres avec un nombre quelconque de vecteurs.

Par l'absurde supposons que $\mathbb{E}$ est de dimension finie.

Il est alors engendré par un nombre fini de vecteurs, noté n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On a supposé qu'il existe dans $\mathbb{E}$ une famille avec $n+1$ vecteurs. Ceci contredit le th 4.

Donc $\mathbb{E}$ est de dimension infinie.

Exemples 2 • $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la famille $(1, X, \dots, X^k)$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$ donc $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on note e_k la suite dont tous les termes sont nuls sauf le k-ième qui vaut 1 :

$$e_k = (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-ième}}}{1}, 0, 0, \dots\dots)$$

Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est libre dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et donc $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.

• $\forall k \in \mathbb{N}^*$, la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, \dots, x \mapsto x^k)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie.