dem Th 6 Soient B_1 et B_2 deux bases de E.

On note n_1 le nombre d'éléments de B_1

et n_2 le nombre d'éléments de B_2.

but $n_1 = n_2$

Supposons $n_2 > n_1$ par l'absurde.

Comme E est engendré par B_1 (c'est une base),

E est engendré par n_1 vecteurs.

D'après le th 4, tout famille de $n_1 + 1$ vecteurs est liée. Comme $n_2 \geq n_1 + 1$ et comme toute surfamille d'une famille liée est liée, la famille B_2 est liée. C'est absurde car c'est une base de E. Donc $n_2 \leq n_1$.

Par symetrie des hypothèses on a de même $n_2 \geq n_1$.

Donc $n_1 = n_2$.

Exemple 1 Soit $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ tq $\dim(\mathbb{F}) = 1$.

Les bases de $\mathbb{F}$ ont donc 1 seul élément.

Donc $\mathbb{F}$ est engendré par un vecteur non nul :

$\mathbb{F}$ est donc une droite vectorielle.

Exemple 2 Soit $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$ tq $\dim(\mathbb{F}) = 2$.

Les bases de $\mathbb{F}$ ont donc 2 éléments.

$\mathbb{F}$ est donc engendré par 2 vecteurs non colinéaires.

$\mathbb{F}$ est donc un plan vectoriel.

Exemple 3 La base canonique de $\mathbb{K}^n$ a n éléments (donc toutes les autres bases aussi).

Donc $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.

Exemple 4 La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ a $n+1$ éléments.

Donc $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.

Exemple 5 La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a $n \times p$ éléments. Donc $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Exemple 6 • $\mathbb{C} = \mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $n = 1$ donc en tant que $\mathbb{C}$-ev on a $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

• Si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ev alors comme tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$\mathbb{C} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1 ; i)$

Comme 1 et i ne sont pas $\mathbb{R}$-proportionnels, la famille $(1, i)$ est $\mathbb{R}$-libre et est donc une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$.

Donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

<u>Exemple 7</u> $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left((2^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$

donc $\mathbb{E}$ est une droite vectorielle donc $\dim \mathbb{E} = 1$

<u>Exemple 8</u> On considère l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ et on note Δ son discriminant.

Si $\Delta \neq 0$: l'équation a 2 racines complexes distinctes r_1 et r_2 et alors $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left((r_1^n)_n , (r_2^n)_n \right)$

Comme $(r_1^n)_n$ et $(r_2^n)_n$ sont non colinéaires la famille $((r_1^n)_n, (r_2^n)_n)$ est une base de $\mathbb{E}$ et donc $\dim \mathbb{E} = 2$.

Si $\Delta = 0$: l'équation a une seule racine complexe r et alors $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left((r^n)_n , (nr^n)_n \right)$

Comme $(r^n)_n$ et $(nr^n)_n$ sont non colinéaires la famille $((r^n)_n, (nr^n)_n)$ est une base de $\mathbb{E}$ et donc $\dim \mathbb{E} = 2$.

<u>Exemple 9</u> Avec les mêmes notations et les mêmes raisonnements on a :

si $\Delta \neq 0$, $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}\right)$

si $\Delta = 0$, $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}\left(t \mapsto e^{rt}, t \mapsto te^{rt}\right)$

donc dans les deux cas $\dim \mathbb{E} = 2$.