<u>dem th 12</u> On suppose que $\mathbb{E}$ est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$.

<u>but</u> $\mathbb{F}$ est de dimension finie ie $\mathbb{F}$ est engendré par un nombre fini de vecteurs et aussi que $\dim(\mathbb{F}) \leq n$.

On définit l'algorithme suivant :

<u>Initialisation</u> $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset$ la famille vide

<u>Boucle tant que</u>

Tant que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \subsetneq \mathbb{F}$:

prendre $\vec{u}$ vecteur de $\mathbb{F}$ qui n'appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et l'ajouter à la famille $\mathcal{F}$.

<u>Sortie</u> On renvoit la famille $\mathcal{F}$.

Dans l'initialisation : $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\} \subseteq \mathbb{F}$

et $\mathcal{F} = \emptyset$ est libre

Dans la boucle, la famille $\mathcal{F}$ est augmentée pas à pas d'un vecteur, choisi de telle sorte que la famille $\mathcal{F}$ reste libre grâce au principe d'extension d'une famille libre.

En sortie de boucle la famille $\mathcal{F}$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{F}$. $\mathcal{F}$ est donc une base de $\mathbb{F}$

La boucle n'est pas infinie car $\mathcal{F}$ est aussi libre dans $\mathbb{E}$ (puisque $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$) et comme $\dim(\mathbb{E}) = n$ on a $\mathrm{card}(\mathcal{F}) \leq n$.

Donc la boucle ne peut tourner qu'au plus n fois.

Donc $\mathbb{F}$ a une base $\mathcal{F}$ formée d'au plus n vecteurs.

Donc $\mathbb{F}$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathbb{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq n = \dim(\mathbb{E})$$

dem fausse du th12

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ une base de $\mathbb{F}$.

Comme $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$, les vecteurs $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p})$ appartiennent aussi à $\mathbb{E}$ et forment donc une famille libre de $\mathbb{E}$.

D'après le th de la base incomplète :

$$p = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) \leq \dim(\mathbb{E}) = n$$

Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{F}$:

$$\dim(\mathbb{F}) \leq \dim(\mathbb{E})$$

FAUX car on a fait comme si $\mathbb{F}$ est de dimension finie alors que ce n'est pas supposé.

dem cor 13 Soit $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$ tel que $\dim(\mathbb{F}) = \dim(\mathbb{E})$.

but $\mathbb{E} = \mathbb{F}$

En reprenant la fin de la démonstration du th 12 on a $\mathcal{F}$ base de $\mathbb{F}$ et famille libre de $\mathbb{E}$ vérifiant :

$$\dim(\mathbb{E}) \underset{\text{par hypothèse}}{=} \dim(\mathbb{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq n = \dim(\mathbb{E})$$

Donc $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{E})$

donc $\mathcal{F}$ est libre maximale dans $\mathbb{E}$

et donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{E}$.

Comme $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$ on a

$\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{E}$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{F}$

donc $\mathbb{E} = \mathbb{F}$