Exemple 2

Pour $x \neq -i$ donc pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{x-i}{x^2+1} = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{\in \mathbb{R}} - i \times \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{\in \mathbb{R}}$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+i} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx - i \times \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(|x^2+1|)\right]_0^1 - i \times \left[\arctan x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) - i \times \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - i\frac{\pi}{4}$$

⚠ Pas de $\ln x$ avec x nombre complexe.

Ne pas écrire $\cancel{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+i} = \left[\ln(x+i)\right]_0^1 = \ln(1+i) - \ln i}$

Exemple 4

Si $a \in \mathbb{R}$:

$$e^{ax} \times \cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ax} \times \cos x + i e^{ax} \times \sin x\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{ax} \times e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{(a+i)x}\right)$$

donc $\displaystyle\int_0^\pi e^{ax} \times \cos x \, dx = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi e^{(a+i)x} dx\right)$

Or $\displaystyle\int_0^\pi e^{(a+i)x} dx = \left[\frac{1}{a+i} e^{(a+i)x}\right]_0^\pi = \frac{1}{a+i} e^{(a+i)\pi} - \frac{1}{a+i}$

$$= \frac{1}{a+i}\left(e^{a\pi} \times e^{i\pi} - 1\right) = -\frac{e^{a\pi}+1}{a+i}$$

$$= -\frac{(e^{a\pi}+1)(a-i)}{(a+i)(a-i)} = -\frac{a(e^{a\pi}+1) - i(e^{a\pi}+1)}{a^2+1}$$

Comme $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_0^\pi e^{ax} \times \cos x \, dx = -\frac{a(e^{a\pi}+1)}{a^2+1}$

Rem $\displaystyle\int_0^\pi e^{x} \times \cos x \, dx = -\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Exemple 5

$$\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{e^{ix}}_{v'(x)} \, dx = \left[x \frac{e^{ix}}{i} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \frac{e^{ix}}{i} \, dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{i} e^{ix} \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{i} e^{i\pi} - 0 - \frac{1}{i} \left[\frac{e^{ix}}{i} \right]_0^{\pi}$$

$$= i\pi - \frac{1}{i^2} \left(e^{i\pi} - 1 \right)$$

$$= i\pi - 2$$

L'IPP est licite car les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, \pi]$.