dem th12 La démonstration pour f continue sur $[a,b]$ est hors-programme.

Pour simplifier on va supposer $a=0$ et $b=1$ donc f continue sur $[0,1]$.

On va faire la preuve dans deux cas particuliers :

① f est de classe C^1 sur $[0,1]$

② f est continue croissante sur $[0,1]$

① On suppose donc f de classe C^1 sur $[0,1]$ (elle est donc continue sur $[0,1]$).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

On pose aussi $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.

D'après la relation de Chasles :

$$I = \int_0^{1/n} f(x)\,dx + \int_{1/n}^{2/n} f(x)\,dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{1} f(x)\,dx$$

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx$$

D'autre part si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(k/n)$ est une constante p/r à x donc :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(k/n)\,dx = \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \times f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dx$

On a donc :

$$S_n - I = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right) dx - \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx \right)$$

$$S_n - I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) dx \qquad (*)$$

D'après l'inégalité triangulaire pour Σ :

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) dx \right|$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ l'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne :

$$\left| \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) dx \right| \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| dx$$

Donc par somme d'inégalités :

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| dx$$

Comme f est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$, sa dérivée f' est continue sur ce même segment et donc la fonction $|f'|$ l'est aussi car composée de deux fonctions continues.

D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet un maximum noté $M \geqslant 0$.

L'inégalité des accroissements finis donne alors que :

$\forall (x_1, x_2) \in [0,1]^2$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M \times |x_1 - x_2|$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a donc :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant M \times \left|\frac{k}{n} - x\right| = M \times \left(x - \frac{k}{n}\right)$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| dx \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} M \times \left(x - \frac{k}{n}\right) dx = M \times \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) dx$$

On choisit $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$ comme primitive de $x \mapsto x - \frac{k}{n}$.

On a :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) dx = \left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{1}{2n^2} - 0 = \frac{1}{2n^2}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n} \quad (**)$$

Par le théorème de majoration de l'erreur [M45 chap 6] :

$$\frac{M}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donne que} \quad S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$$

Rem : L'inégalité $(**)$ donne la précision de la méthode des rectangles en informatique, pour une fonction de classe C^1. Avec la méthode des trapèzes l'erreur est en $\frac{1}{n^2}$.

② On recommence la preuve en supposant cette fois : f continue et croissante sur $[0,1]$.

On repart de la formule $(*)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n - I = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) dx$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la croissance de f donne que :

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k}{n}\right)dx \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)dx$$

ie $$0 \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx$$

$$= \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

On multiplie par -1 :

$$\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)dx \leqslant 0$$

Par somme d'inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ et en reconnaissant à gauche une somme télescopique :

$$\frac{1}{n}\left(f(0)-f(1)\right) \leqslant S_n - I \leqslant 0$$

Comme $\frac{1}{n}\left(f(0)-f(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème de convergence par encadrement [th 43 chap 6] donne que :

$$S_n - I \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$$