dem th 13

On suppose que f est continue sur I et on fixe $x_0 \in I$.

On pose $\forall x \in I$, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

but F est dérivable sur I.

On fixe $a \in I$ qcq.

but $\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(a)$

Pour tout réel h non nul tel que $a+h \in I$:

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \frac{1}{h} \int_{a}^{a+h} f(t)\,dt$$

On reconnait la valeur moyenne de f entre a et $a+h$.

On a montré en exercice qu'elle est atteinte, ie il existe $c \in [\overleftrightarrow{a, a+h}]$ tel que

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f(c)$$

On a $a \leq c \leq a+h$ ou $a+h \leq c \leq a$ selon le signe de h

donc $a - |h| \leq c \leq a + |h|$ pour tout h

donc $c \xrightarrow[h \to 0]{} a$ par le th d'encadrement

Comme f est continue en a (elle est continue sur I et $a \in I$):

$$f(c) \xrightarrow[h \to 0]{} f(a)$$

donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} = f(a)$.

Donc F est dérivable en a et $F'(a) = f(a)$.

C'est vrai pour tout $a \in I$.

Donc F est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Comme f est continue sur I on a donc F' continue sur I

et donc F est de classe C^1 sur I.

dem cor 14

1. On suppose f continue sur un intervalle I.

D'après le th 13 si on fixe $x_0 \in I$ la fonction

$F : x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est de classe C^1 sur I de dérivée f.

Alors si $C \in \mathbb{R}$ toute fonction de la forme $x \longmapsto F(x) + C$ est C^1 sur I et a pour dérivée $f + 0 = f$, donc est une primitive de f sur I.

Donc f a une infinité de primitives sur I.

Soient G et H primitives qcq de f sur I.

Alors G et H sont dérivables sur I de dérivée f donc $G - H$ est dérivable sur I de dérivée nulle.

D'après le th 21 du chap 12, $G - H$ est constante sur l'intervalle I.

Donc les primitives de f sur I sont toutes égales à une constante additive près.

2. On fixe $x_0 \in I$.

Analyse Soit G une primitive de f sur I tq $G(x_0) = 0$.

D'après 1. il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$, $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C$

Mais $G(x_0) = 0$ donc $C = 0$

Donc $\forall x \in I$, $G(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = F(x)$

Synthèse F est une primitive de f sur I vérifiant $F(x_0)=0$.

Ccl F est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F(x_0)=0$

cor 15 On suppose f continue sur $[a,b]$.
Soit F une primitive de f sur $[a,b]$.

Alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tq :

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Donc $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - 0 - C = \int_a^b f(t)dt$

<u>dem cor 16</u> On suppose f de classe C^1 sur $[a,b]$.

Alors f' est continue sur $[a,b]$ donc $\int_a^b f'(t)dt$ est définie.

f est une primitive de f' sur $[a,b]$ donc :

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

Exemple 1 Soit f de classe C^1 sur I tq f' est bornée :

$\exists M > 0, \forall x \in I, |f'(x)| \leq M$

Pour tout $(x,y) \in I^2$:

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)\,dt \right|$$

si $x > y$ $\quad |f(x) - f(y)| \leq \int_y^x |f'(t)|\,dt$

mais $[y,x] \subseteq I$ donc $\forall t \in [y,x], |f'(t)| \leq M$

donc $\int_y^x |f'(t)|\,dt \leq \int_y^x M\,dt = M(x-y)$

donc $|f(x) - f(y)| \leq M(x-y) = M \times |x-y|$

si $x < y$ de même

si $x = y$ l'inégalité est évidente

Rem : dans le cor 20 du chap 12 les hypothèses sont plus faibles. f est supposée seulement dérivable sur I.

<u>dem cor 17</u> On suppose f C^1 sur un intervalle $[-\delta,\delta]$ où $\delta>0$.

On suppose que f' a un $DL_n(0)$:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

<u>but</u> $f(x)=f(0)+\sum_{k=0}^{n}\frac{d_k}{k+1}x^{k+1}+\underset{x\to 0}{o}(x^{n+1})$

Soit $\varepsilon>0$. Comme $\dfrac{f'(x)-\sum_{k=0}^{n} d_k x^k}{x^n}\xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$\exists \alpha\in]0,\delta[$ tq $\forall x\in[-\alpha,\alpha]\setminus\{0\}$, $\left|\dfrac{f'(x)-\sum_{k=0}^{n} d_k x^k}{x^n}\right|\leqslant \varepsilon\times(n+1)$

donc $\forall x\in[-\alpha,\alpha]$, $\left|f'(x)-\sum_{k=0}^{n} d_k x^k\right|\leq \varepsilon|x|^n\times(n+1)$

Pour $x\in[-\alpha,\alpha]$:

$$\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}f(x)-f(0)-\sum_{k=0}^{n}\frac{d_k}{k+1}x^{k+1}=\int_0^x\left(f'(t)-\sum_{k=0}^{n} d_k t^k\right)dt$$

Si $x>0$

$$|\varphi(x)|\leqslant\int_0^x\left|f'(t)-\sum_{k=0}^{n} d_k t^k\right|dt$$

dans l'intégrale $t\in[0,x]\subseteq[-\alpha,\alpha]$

donc $\left|f'(t)-\sum_{k=0}^{n} d_k t^k\right|\leqslant\varepsilon(n+1)|t|^n=\varepsilon(n+1)t^n$

Ainsi $|\varphi(x)|\leqslant\int_0^x\varepsilon(n+1)t^n\,dt=\varepsilon(n+1)\int_0^x t^n dt=\varepsilon x^{n+1}=\varepsilon|x|^{n+1}$

si $x < 0$

$$\varphi(x) = -\int_x^0 \left(f'(t) - \sum_{k=0}^{n} d_k t^k\right) dt$$

donc $$|\varphi(x)| = \left|\int_x^0 \left(f'(t) - \sum_{k=0}^{n} d_k t^k\right) dt\right|$$

$$\leq \int_x^0 \left|f'(t) - \sum_{k=0}^{n} d_k t^k\right| dt$$

$$\leq \int_x^0 \varepsilon(n+1)|t|^n \, dt = \varepsilon(n+1)\int_x^0 (-t)^n dt = \varepsilon(-x)^{n+1}$$

$$= \varepsilon|x|^{n+1}$$

On a donc pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$ tq $x \neq 0$:

$|\varphi(x)| \leq \varepsilon |x^{n+1}|$ ie $\left|\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}}\right| \leq \varepsilon$

On a donc montré que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left|\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}}\right| \leq \varepsilon$

ce qui est la définition de $\frac{\varphi(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

ie $\varphi(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^{n+1})$

exemple pour le cor 17 :

comme $\cos x \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

on a $\cos x = 1 + \underset{x \to 0}{o}(1)$

donc $\sin x = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$

donc $-\cos x = -1 + \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$

donc $-\sin x = -x + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

donc $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$

on intègre à chaque étape

etc .....