dem Th 25 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une VAR telle que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

* Comme $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ on a :

$$\mathbb{E}(X) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} k \times \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$ puisque le terme pour $k=0$ est nul

Mais si $k \geq 1$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ ⚠ Exclure $k=0$ de cette formule

la formule du pion donne

Donc $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

On change d'indice : $k' = k-1$ ie $k = k'+1$

$$\mathbb{E}(X) = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} \cdot (1-p)^{n-k-1}$$

$$= np \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

D'après la formule du binôme :

$$\mathbb{E}(X) = np \times (p + 1 - p)^{n-1} = np \times 1 = \boxed{np}$$

* On utilise ici une astuce assez classique.
A la place de calculer $\mathbb{E}(X^2)$ on va calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$.
Comme $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ le théorème de transfert donne :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \times \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$ puisque les termes pour $k=0$ et $k=1$ sont nuls

Mais si $k \geqslant 2$: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$

donc $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ ⚠ Exclure $k=0$ et $k=1$ de cette formule

Ainsi : $$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}\left(X(X-1)\right) = n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n(n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-k-2}$$

grâce au chgt d'indice $k' = k-2$
ie $k = k'+2$

Donc $$\mathbb{E}\left(X(X-1)\right) = n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}$$

$$= n(n-1)p^2 \times (p+1-p)^{n-2}$$ grâce à la formule du binôme

$$= n(n-1)p^2$$

Mais par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(X(X-1)\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - X\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

donc $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}\left(X(X-1)\right) + \mathbb{E}(X)$

Donc avec la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X(X-1)\right) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np\left((n-1)p + 1 - np\right)$$

$$= \boxed{np(1-p)}$$

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : Succés ou Echec.

On la répète n fois de manières indépendantes.

C'est ce qu'on appelle <u>schéma de Bernoulli</u> ou <u>schéma binomial</u>.

On note $X =$ "nb de fois où on a obtenu un succés"

et p la probabilité d'obtenir un succés lors d'une seule répétition.

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Démonstration : On choisit $\Omega = \{0,1\}^n$

* Comme on répète n fois l'expérience on a

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!].$$

* Pour $k \in [\![0,n]\!]$ calculons $\mathbb{P}(X=k)$.

D'après la modélisation :

$(X=k) =$ " les n répétitions ont donné exactement k succés (et donc $n-k$ échecs)"

On note $a = \mathrm{Card}((X=k))$

$= $ "nb de façons d'avoir exactement k succès au cours des n répétitions"

$= $ "nb d'anagrammes du mot $\underbrace{\underbrace{PP\ldots P}_{k \text{ fois}}\underbrace{FF\ldots F}_{n-k \text{ fois}}}_{n \text{ fois}}$"

$$= \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

On peut noter :

$$(X=k) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_a\} = \biguplus_{j=1}^{a} \{\omega_j\}$$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^{a} \mathbb{P}(\{\omega_j\})$$

Mais pour tout $j \in [\![1, a]\!]$:

ω_j est un "anagramme" de la liste $(\underbrace{1,1,\ldots,1}_{k \text{ fois}},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-k \text{ fois}})$

(on rappelle que $\Omega = \{0,1\}^n$)

Comme les lancers sont effectués de manières indépendantes :

$$\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = p^k(1-p)^{n-k}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^{a} \underbrace{p^k(1-p)^{n-k}}_{\text{ne dépend pas de } j} = a \times p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On a donc bien obtenu que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

<u>Exemple</u> Urne avec 10 boules : 6 blanches et 4 noires.

On en pioche 20 avec remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir 12 noires au total ?

Si on note $X =$ "nb de boules noires obtenues au cours de 20 tirages"

alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(20, \frac{4}{10}\right)$.

On demande $\mathbb{P}(X = 12)$.

On a $\mathbb{P}(X = 12) = \binom{20}{12}\left(\frac{4}{10}\right)^{12}\left(\frac{6}{10}\right)^{8}$