Def 19 Soit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ une partie finie de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une VAR $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ suit la loi uniforme sur A lorsque :

$$X(\Omega) = A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\text{et } \forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = a_k) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|A|}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$

dem th 20 Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une VAR

tq $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

* On a donc $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$

et donc $\mathbb{E}(X) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} k \times \mathbb{P}(X=k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n+1}{2}}$$

* Comme $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ le th de transfert donne :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ensuite avec la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n+1}{12} \times \left(2(2n+1) - 3(n+1)\right) = \frac{n+1}{12}(n-1) = \boxed{\frac{n^2-1}{12}}$$

⚠ C'est faux si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0,n \rrbracket)$.

Dans ce cas $X+1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$

Donc $\mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}(X) + 1 = \frac{n+2}{2}$

$V(X+1) = V(X) = \frac{(n+1)^2 - 1}{12}$

Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $V(X) = \frac{n(n+2)}{12}$.

Exemple 3 $n \in \mathbb{N}^*$.

$X =$ "nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef"

* Comme il n'essaie pas deux fois la même :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!].$$

* Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

On utilise la modélisation :

$(X=k) =$ " le gardien trouve la bonne clef au bout de k essais"

$=$ " le gardien échoue $k-1$ fois puis trouve la bonne clef"

Donc $(X=k) = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_{k-1}} \cap E_k$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$E_i =$ " la i-ème clef essayée est la bonne"

Les évènements $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ne semblent pas mutuellement indépendants (si une clef est la bonne, la suivante ne le sera pas ....).

On utilise la formule du conditionnement multiple.

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{E_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{E_1}}(\overline{E_2}) \times \mathbb{P}_{\overline{E_1} \cap \overline{E_2}}(\overline{E_3}) \times \cdots$$

$$\cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-2} \overline{E_i}}(\overline{E_{k-1}}) \times \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{E_i}}(E_k)$$

$$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

Avec cette méthode il a autant de chances de trouver la clef à n'importe quel essai.

Le nombre moyen d'essais est : $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$

En moyenne il va essayer un peu plus de la moitié des clefs.