<u>Exemple 3</u> Urne avec n boules numérotées :

① ② ③ . . . . . ⓝ

On en pioche n sans remise.

X = "nb de tirages nécessaires pour obtenir un numéro supérieur ou égal au précédent, si cela se produit, et $n+1$ si cela ne se produit pas"

* On effectue n tirages et X est soit égal à un nombre de tirages, soit égal à $n+1$.

Donc $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

* Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.

On veut calculer $\mathbb{P}(X=k)$.

Comme on est en situation d'"équiprobabilité" :

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\text{Card}(X=k)}{\text{Card}(\Omega)}$$

On sait que $\text{Card}(\Omega) = A_n^n = n!$

Par contre il est difficile de calculer $\text{Card}(X=k)$.

→ Pour simplifier on va calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$.

Si $k \in [\![2, n]\!]$:

$(X \geqslant k) =$ " on a obtenu un numéro supérieur ou égal au précédent, pour la première fois, au k-ième tirage ou après."

On reformule :

$(X \geqslant k) =$ " au cours des $k-1$ premiers tirages, les n° obtenus sont dans l'ordre strictement décroissant"

⚠ c'est vrai même si $k=2$,
et même si $k = n+1$.

On $\text{Card}(X \geqslant k) = \binom{n}{k-1} A_{n-k+1}^{n-k+1}$ on choisit les $k-1$ n° ≠ qu'on va obtenir et il y a 1 seule façon de les ordonner <u>puis</u> on choisit les derniers numéros

Donc $\mathbb{P}(X \geqslant k) = \dfrac{\binom{n}{k-1} \times (n-k+1)!}{n!}$

$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \mathbb{P}(X \geqslant k) = \dfrac{1}{(k-1)!}$

Si $k \in [\![2, n+1]\!]$ et $k+1 \in [\![2, n+1]\!]$

ie si $k \in [\![2, n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \frac{1}{(k-1)!}$$

$$\mathbb{P}(X \geq k+1) = \frac{1}{k!}$$

donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$

$$= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

Donc $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$

Il reste à calculer $\mathbb{P}(X = n+1)$.

Comme $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$ on sait que (cor 5) :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}(X = k) = 1$$

donc $\mathbb{P}(X = n+1) = 1 - \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X = k)$

$$= 1 - \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{n!} \right) = \frac{1}{n!}$$

Finalement :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k)=\begin{cases}\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!} & \text{si } k\in[\![2,n]\!]\\[2ex] \dfrac{1}{n!} & \text{si } k=n+1\end{cases}}$$