dem th 9 :

On suppose que $f : \mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

et que $X$ est une V.A.R tq $X(\Omega) \subseteq \mathcal{D}_f$.

On pose $Y = f(X)$.

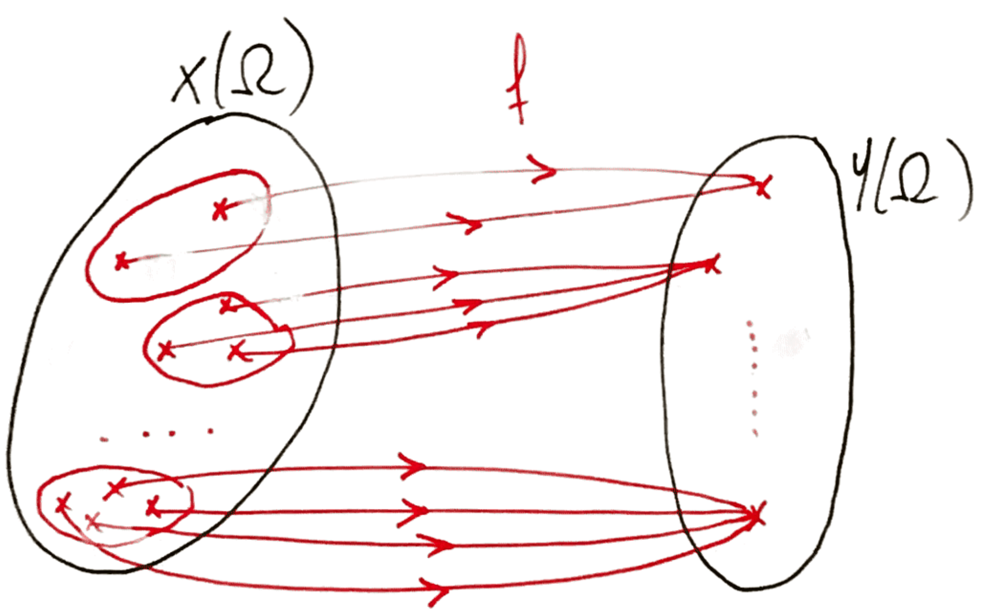
Par déf :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) \underset{\text{th7}}{=} \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \left( \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } y = f(x)}} \mathbb{P}(X = x) \right)$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } y = f(x)}} y \times \mathbb{P}(X = x) \right)$$

$$= \sum_{y \in Y(\Omega)} \left( \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } y = f(x)}} f(x) \times \mathbb{P}(X = x) \right)$$

Or :



On a $X(\Omega) = \bigcup\limits^{+}_{y \in Y(\Omega)} \{ x \in X(\Omega) ; \ f(x) = y \}$

ie on partitionne $X(\Omega)$ en regroupant dans la même partie les éléments qui ont la même image par $f$.

Donc formellement :

$$" \sum_{x \in X(\Omega)} \cdot = \sum_{y \in Y(\Omega)} \Bigg( \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ tq\ y = f(x)}} \cdot \Bigg) "$$

car pour additionner selon tous les éléments de $X(\Omega)$ on commence par additionner selon tous les éléments qui ont la même image et ensuite on additionne entre eux tous ces sous-totaux (c'est une généralisation du th de Fubini)

Ainsi :

$$E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times P(X = x)$$