Exemple 1 $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$ et $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$

$$\langle \vec{\imath}, \vec{\jmath} \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$$

donc $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$

Exemple 2 Soit $c \in \mathbb{R}$.

On a $$\langle c, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} c \times \cos(t)\,dt = c \times \int_0^{2\pi} \cos(t)\,dt$$

$$= c \times \left[\sin t\right]_0^{2\pi} = c \times (0 - 0) = 0$$

donc $c \perp \cos$

<u>dem prop 19</u> Soit $\vec{v} \in E$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\forall \vec{u} \in E$, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Alors $\forall \vec{u} \in E$, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

En particulier si $\vec{u} = \vec{v}$: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$

Comme $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est une forme définie : $\vec{v} = \vec{0_E}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\vec{v} = \vec{0_E}$.

D'après la prop 2 : $\forall \vec{u} \in E$, $\langle \vec{u}, \vec{0_E} \rangle = 0$

donc $\forall \vec{u} \in E$, $\vec{u} \perp \vec{0_E}$.

<u>Exemple 3</u> Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue : $\int_0^1 f(t) \times g(t)\,dt = 0$

Alors $\forall g \in C^0([0,1] ; \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle = 0$

où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $C^0([0,1] ; \mathbb{R})$.

Donc f est la fonction nulle.

<u>Exemple 4</u> Soit $\vec{u} \in E$:

$$\vec{u} \in \emptyset^\perp \iff \forall \vec{v} \in \emptyset, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \quad [\text{tjs vrai}]$$
$$\iff \vec{u} \in E$$

Donc $\emptyset^\perp = E$

$$\vec{u} \in \{0_E\}^\perp \iff \forall \vec{v} \in \{0_E\}, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$
$$\iff \langle \vec{u}, \vec{0_E} \rangle = 0 \quad [\text{tjs vrai}]$$
$$\iff \vec{u} \in E.$$

Donc $\{\vec{0_E}\}^\perp = E$

<u>Exemple 5</u> Soit $\vec{u} \in E$.

$$\vec{u} \in E^\perp \iff \forall \vec{v} \in E, \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$
$$\iff \vec{u} = \vec{0_E} \quad \text{d'après la prop 19}$$

Donc $E^\perp = \{\vec{0_E}\}$.

Exemple 6 $\quad A = \{(1,1,1)\}$. Soit $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{u} \in A^\perp \iff \forall \vec{v} \in A, \ \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$
$$\iff \langle \vec{u}, (1,1,1) \rangle = 0$$
$$\iff x + y + z = 0$$

Donc $A^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x+y+z=0\} = \mathrm{Vect}\big((1,-1,0),(1,0,-1)\big)$

dem th 21

1. * On a $\forall \vec{a} \in A$, $\langle \vec{a}, \vec{O_E} \rangle = 0$ [prop 19]

donc $\vec{O_E} \in A^\perp$ donc $A^\perp \neq \emptyset$.

* Soit $(\lambda, \vec{u_1}, \vec{u_2}) \in \mathbb{K} \times (A^\perp)^2$.

On a $\forall \vec{a} \in A$, $\langle \vec{a}, \lambda \vec{u_1} + \vec{u_2} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{u_1} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{u_2} \rangle$

$= \lambda \times 0 + 0 = 0$

car $\vec{u_1} \in A^\perp$ et $\vec{u_2} \in A^\perp$

donc $\lambda \vec{u_1} + \vec{u_2} \in A^\perp$.

Ceci prouve que $A^\perp$ est un sev de $\mathbb{E}$

2. On suppose que $A = \text{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\vec{u} \in A^\perp$.

Alors $\forall \vec{a} \in A$, $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0$

En particulier $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle \vec{u}, \vec{e_k} \rangle = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\langle \vec{u}, \vec{e_k} \rangle = 0$

Soit $\vec{a} \in A$ fixé qcq.

Comme $A = \text{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})$: $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $\vec{a} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot \vec{e_k}$

Donc $\langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = \langle \vec{u}, \sum_{k=1}^{p} \alpha_k . \vec{e_k} \rangle$

$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \times \langle \vec{u}, \vec{e_k} \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \times 0 = 0$$

Donc $\vec{u} \in A^\perp$.

On a donc $\left(\mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p})\right)^\perp = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_p}\}^\perp$

3. On suppose $A \subseteq B$.

Soit $\vec{u} \in B^\perp$.

Alors $\forall \vec{b} \in B, \ \langle \vec{u}, \vec{b} \rangle = 0$

Comme $A \subseteq B$ on a en particulier :

$$\forall \vec{a} \in A, \ \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0$$

Donc $\vec{u} \in A^\perp$.

Ceci prouve que $B^\perp \subseteq A^\perp$.

4. Soit $\vec{a} \in A$.

Alors $\forall \vec{u} \in A^\perp, \ \langle \vec{u}, \vec{a} \rangle = 0$

donc $\vec{a} \in (A^\perp)^\perp$.

Ceci prouve que $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

<u>Exemple 7</u> On pose $D = \{(1,1,1)\} = \{\vec{u}\}$ où $\vec{u} = (1,1,1)$

Alors $D^\perp = \left(\text{Vect}((1,1,1))\right)^\perp = \{(1,1,1)\}^\perp$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y+z = 0\}$$

$$= \text{Vect}\left(\underbrace{(-1,1,0)}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(-1,0,1)}_{\vec{v_2}}\right)$$

Donc $(D^\perp)^\perp = \left(\text{Vect}((-1,1,0),(-1,0,1))\right)^\perp$

$$= \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}^\perp \neq D$$ car D n'est pas un sev

Donc si $\vec{u} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$\vec{u} \in (D^\perp)^\perp \iff \langle \vec{u}, \vec{v_1} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v_2} \rangle = 0 \iff -x+y = -x+z = 0$$

Donc $(D^\perp)^\perp = \text{Vect}((1,1,1)) \neq D$