TD1 Ex8

1. Par double-implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $\bar{A} \subseteq B$. but $A \cup B = E$.

$\boxed{\subseteq}$ Comme A et B parties de E on a $A \cup B \subseteq E$.

$\boxed{\supseteq}$ Soit $x \in E$ fixé qcq. but $x \in A \cup B$.

Cas 1 $x \in A$. Alors $x \in A \cup B$

Cas 2 $x \notin A$. Alors $x \in \bar{A}$ donc $x \in B$ (puisque $\bar{A} \subseteq B$)

et donc $x \in A \cup B$.

Dans tous les cas $x \in A \cup B$.

Ceci prouve que $E \subseteq A \cup B$.

Par double-inclusion $E = A \cup B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $E = A \cup B$.

Soit $x \in \bar{A}$. Comme A est une partie de E alors $x \in E$.

donc $x \in A$ ou $x \in B$.

Mais on a aussi $x \in \bar{A}$ donc est sûr que $x \in B$.

Ainsi $\bar{A} \subseteq B$.

Par double-implication: $\bar{A} \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = E$

2. Par double-implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Evident

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

but $B = C$

$\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in B$. but $x \in C$.

Cas 1 $x \in A$. Alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ donc $x \in C$.

Cas 2 $x \notin A$. Mais $x \in B$ donc $x \in A \cup B$

donc $x \in A \cup C$. Comme $x \notin A$: $x \in C$.

Dans tous les cas $x \in C$.

$\boxed{\supseteq}$ De même en échangeant B et C.

Par double-inclusion $B = C$.

Par double-implication : $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \Longleftrightarrow B = C$

3. Par double-implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Evident

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $A \cup B = A \cap C$ et $A \cap B = A \cup C$.

but $A = B = C$.

On a : $A \subseteq A \cup B$ donc $A \subseteq A \cap C$ donc $A \subseteq C$.

$C \subseteq A \cup C$ donc $C \subseteq A \cap B$ donc $C \subseteq B$

$B \subseteq A \cup B$ donc $B \subseteq A \cap C$ donc $B \subseteq A$

Donc $A \subseteq C \subseteq B \subseteq A$ donc $A = B = C$

Par double-implication : $(A \cup B = A \cap C \text{ et } A \cap B = A \cup C) \Longleftrightarrow A = B = C$