Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ croissante et telle que $g : x \longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
Mq f est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $x_0 > 0$. On va montrer que f est continue à gauche et à droite en x_0.
Comme f est croissante sur $]0,+\infty[$ on sait d'après le théorème de la limite monotone que $f(x_0^-)$ $f(x_0)$ et que $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$. $(*)$
De même comme g est décroissante, $g(x_0^-)$ et $g(x_0^+)$ existent et $g(x_0^-) \geq g(x_0) \geq g(x_0^+)$.

Mais $g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$

et $g(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_0^+)}{x_0}$ par quotient de limites

donc de même $g(x_0^-) = \frac{f(x_0^-)}{x_0}$

Ainsi $\frac{f(x_0^-)}{x_0} \geq \frac{f(x_0)}{x_0} \geq \frac{f(x_0^+)}{x_0}$

Comme $x_0 > 0$: $f(x_0^-) \geq f(x_0) \geq f(x_0^+)$ $(**)$

$(*)$ et $(**)$ donnent : $f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+)$.
Donc f est continue en x_0. Ceci pour tout $x_0 > 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est continue sur }]0,+\infty[}$