TD10 Ex 5

1. Comme $\deg B = 2$ alors il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$A = X^{2n} + 2X^n + 1 = (X^2+1).Q(X) + aX + b \quad \text{où } Q(X) \in \mathbb{R}[X]$$

En évaluant en i et en $-i$:

$$\begin{cases} i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \\ i^{2n} + 2(-1)^n i^n + 1 = -ai + b \end{cases}$$

donc $b = 1 + (-1)^n + i^n + (-i)^n = 1 + (-1)^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

$a = \dfrac{i^n - (-i)^n}{i} = 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Donc le reste est $\boxed{R = 2.\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).X + 1 + (-1)^n + 2.\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$

2. Comme $\deg B = 2$ alors il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que :

$$A = X^{2n} + 2X^n + 1 = (X-i)^2.Q(X) + aX + b \quad \text{où } Q(X) \in \mathbb{C}[X]$$

On évalue en i :

$$(-1)^n + 2i^n + 1 = ai + b$$

On dérive puis on évalue en i :

$$\frac{2n(-1)^n}{i} + \frac{2ni^n}{i} = a \quad \text{donc } a = -2ni\left[(-1)^n + i^n\right]$$

Puis $b = (-1)^n + 2i^n + 1 - 2n(-1)^n - 2ni^n = (1-2n).(-1)^n + 2.(1-n).i^n + 1$

Donc le reste est : $\boxed{R = -2ni\left[(-1)^n + 1\right]X + (1-2n)(-1)^n + 2(1-n)i^n + 1}$

3. De même :

$$X^n + 2X - 2 = (X-2)^2.Q(X) + aX + b \quad \text{où } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } Q \in \mathbb{R}[X]$$

On évalue en 2 puis on dérive et on évalue en 2.

On évalue en 2 puis on dérive et on évalue en 2.

$$\begin{cases} 2^n + 2 = 2a + b \\ n2^{n-1} + 2 = a \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = n2^{n-1} + 2 \\ b = (1-n)2^n - 2 \end{cases}$$

Donc le reste est $\boxed{R = (n2^{n-1} + 2)X + (1-n)2^n - 2}$

4. $X^n + 2X - 2 = (X-3)^2 \cdot Q(X) + aX + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{cases} 3^n + 4 = 3a + b \\ n3^{n-1} + 2 = a \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = n3^{n-1} + 2 \\ b = (1-n)3^n - 2 \end{cases}$$

Donc le reste est $\boxed{R = (n3^{n-1} + 2)X + (1-n)3^n - 2}$