TD10 Ex 6

Comme $\deg(X^3 - 2X^2 + X) = 3$ il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$X^n = \underbrace{(X^3 - 2X^2 + X)}_{= X(X-1)^2} . Q(X) + aX^2 + bX + c$$

On évalue en 0 et en 1 :

$$0 = c \quad (\text{si } n \geq 1)$$
$$1 = a + b + c$$

On dérive puis on évalue en 1 :

$$n = 2a + b$$

Donc $\begin{cases} a = n - 1 \\ b = 2 - n \\ c = 0 \end{cases}$

Donc $X^n = (X^3 - 2X^2 + X) . Q(X) + (n-1)X^2 + (2-n)X$ pour $n \geq 1$.

Et donc $\boxed{A^n = (n-1)A^2 + (2-n)A \quad \text{si } n \geq 1}$ et $A^0 = I_3$