$\forall t > 0,\ g(t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}}$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$ et d'après les théorèmes généraux, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. $g(0^+) = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ par croissances comparées.

Donc si on pose $g(0) = 0$ alors $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^+$ et g continue à droite en 0.

Alors pour > 0 : $\frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$

car $x^2 e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

Par définition : g est dérivable à droite en 0 et $g'_d(0) = 0$

2. Pour $t > 0$: $g'(t) = -\frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}} + \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} = \frac{1}{t^3} \cdot e^{-\frac{1}{t}} (1 - t)$

du signe de $1 - t$

t	0	x_n	1	y_n	$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$ $\frac{1}{n}$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{n}$ $\searrow$	0

g est continue sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[0,1]$.

D'après le théorème de la bijection monotone, g est bijective de $[0,1]$ vers $g([0,1]) = \left[0, \frac{1}{e}\right]$

Si $n \geq 2$ alors $\frac{1}{n} \in \left[0, \frac{1}{e}\right]$ et donc $\exists!\, x_n \in [0,1],\ g(x_n) = \frac{1}{n}$

De même g est bijective de $]1,+\infty[$ sur $]0,\frac{1}{e}[$.

Si $n \geqslant 2$ alors $\frac{1}{n} \in]0,\frac{1}{e}[$ donc $\exists!\, y_n \in]1,+\infty[$, $g(y_n)=\frac{1}{n}$.

Donc l'équation $g(t)=\frac{1}{n}$ admet deux solutions exactement sur $\mathbb{R}^+$ notées x_n et y_n.

Elles vérifient $0 \leqslant x_n \leqslant 1 < y_n$.

De plus $g(0)=0 \neq \frac{1}{n}$ donc $x_n \neq 0$

$g(1)=\frac{1}{e} \neq \frac{1}{n}$ donc $x_n \neq 1$.

Ainsi : $\boxed{0 < x_n < 1 < y_n}$

3. Pour $n \geqslant 2$: $g(x_n)=\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(x_{n+1})$

Comme $(x_n, x_{n+1}) \in [0,1]^2$ et g strictement croissante sur $[0,1]$:

$$x_n > x_{n+1}$$

Donc $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

De même $\forall n \geqslant 2$, $g(y_n)=\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = g(y_{n+1})$

Comme $(y_n, y_{n+1}) \in]1,+\infty[^2$ et g strictement décroissante sur $]1,+\infty[$: $y_n < y_{n+1}$

Donc $(y_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.

Comme g est bijective de $[0,1]$ sur $[0,\frac{1}{e}]$ elle admet une fonction réciproque

$$h_1 : [0,\frac{1}{e}] \longrightarrow [0,1]$$

On a donc $h_1 = \left(g_{|[0,1]}^{|[0,\frac{1}{e}]}\right)^{-1}$

Pour $n \geq 2$: $g(x_n) = \frac{1}{n} \in [0,\frac{1}{e}]$

donc $h(g(x_n)) = h\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $x_n = h\left(\frac{1}{n}\right)$ puisque $x_n \in [0,1]$.

Mais d'après le théorème de la bijection monotone h est continue en 0 et donc $h\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(0) = 0$

Donc $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

De même si $h_2 :]0,\frac{1}{e}[\longrightarrow]1,+\infty[$ est la fonction réciproque de $g_{|]1,+\infty[}^{|]0,1/e[}$ alors :

$$\forall n \geq 2, \quad y_n = h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

Mais $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $h_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

donc $h_2\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\boxed{y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$