1. On fixe $a \geq 0$.

P_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale) et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P_a'(x) = 3x^2 + a > 0$$

Donc P_a est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $P_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $P_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

on en déduit que P_a est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Donc $\exists ! x \in \mathbb{R},\ P_a(x) = 0$.

2. $P_a(0) = -1 < 0 = P_a(u(a))$

Comme P_a strict croissante sur $\mathbb{R}$: $0 < u(a)$.

Donc $u(\mathbb{R}^+) \subseteq \mathbb{R}_+^*$

3. Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a < b$.

On a $P_a(u(a)) = P_b(u(b)) = 0$

ie $u(a)^3 + a u(a) - 1 = u(b)^3 + b u(b) - 1 = 0$

Et $P_a(u(b)) = u(b)^3 + a.u(b) - 1$

$$= a.u(b) - b.u(b) = \underbrace{(a-b)}_{<0}.\underbrace{u(b)}_{>0} < 0$$

Donc $P_a(u(b)) < P_a(u(a))$

Comme P_a strictement croissante sur $\mathbb{R}$: $u(b) < u(a)$.

Donc u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. $P_0 = X^3 - 1$ donc $u(0) = 1$.

Comme u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et est minorée par 0, on sait qu'elle a une limite $l \geq 0$ lorsque $a \to +\infty$.

Mais $\forall a \geq 0$, $u(a)^3 + a.u(a) - 1 = 0$

donc $\forall a > 0$, $\frac{u(a)^3}{a} + u(a) - \frac{1}{a} = 0$

Si $a \to +\infty$: $0 + l - 0 = 0$ Donc $l = 0$.

Ainsi $\boxed{u(a) \xrightarrow[a \to +\infty]{} 0}$ Donc $u : \mathbb{R}^+ \to]0,1]$

5. Soient $b \in]0,1]$ et $a \in \mathbb{R}^+$.

$u(a) = b \iff P_a(b) = 0 \iff b^3 + ab - 1 = 0$

$\iff a = \frac{1-b^3}{b}$

Comme $\frac{1-b^3}{b} \geq 0$ on a montré que :

$\forall b \in]0,1], \exists! a \in \mathbb{R}^+, u(a) = b$

Donc u est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0,1]$ et

$$u^{-1} :]0,1] \to \mathbb{R}^+$$
$$b \mapsto \frac{1-b^3}{b}$$

6. u^{-1} est strictement décroissante sur $]0,1]$
(car u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$)
et elle est continue sur $]0,1]$ (fraction rationnelle)

Donc $(u^{-1})^{-1} = u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

7. De même u^{-1} est strictement décroissante sur $]0,1]$
et dérivable sur $]0,1]$ et :

$$\forall b \in]0,1], \ (u^{-1})'(b) = \frac{-3b^2 \times b - (1-b^3) \times 1}{b^2} = \underbrace{\frac{-1-2b^3}{b^2}}_{<0}$$

donc $(u^{-1})'$ ne s'annule pas sur $]0,1]$.

Ainsi $(u^{-1})^{-1} = u$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall a \geq 0, \ u'(a) = \frac{1}{(u^{-1})'(u(a))} = \frac{-u(a)^2}{1+2u(a)^3} = \boxed{\frac{u(a)^2}{2au(a)-3}}$$

donc $u'(0) = -\frac{1}{3}$

8.