Le jeu de pile ou face

Important : Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note :

P_k = "obtenir pile au k-ième lancer"

F_k = "obtenir face au k-ième lancer" $= \overline{P_k}$

Comme les lancers sont effectués de manières indépendantes, on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont mutuellement indépendants.

Par exemple $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap F_5) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(F_3) \times \mathbb{P}(P_4) \times \mathbb{P}(F_5)$

$= p \times p \times q \times p \times q = p^3 \times q^2$

Plus général si E correspond à une succession de n lancers on a

$$\mathbb{P}(E) = p^{\text{nb de piles}} \times q^{\text{nb de faces}} \quad (*)$$

Et on a vu au lycée le schéma binomial / de Bernoulli.

Si on lance n fois la pièce la probabilité d'obtenir k piles exactement est : $\binom{n}{k} \times \underbrace{p^k \times q^{n-k}}_{\text{formule } (*)}$

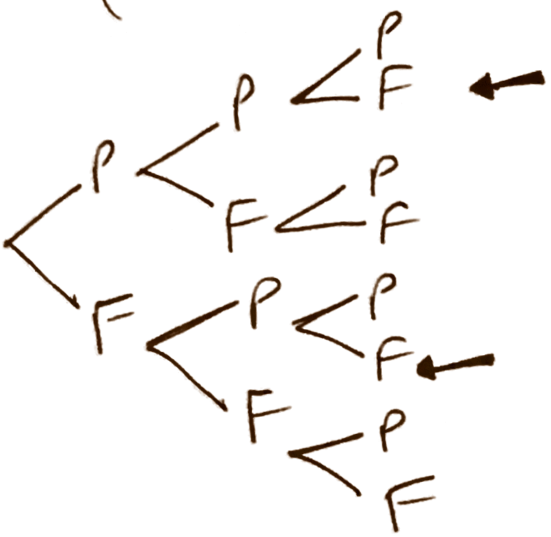
nombre de successions de n lancers qui donnent exactement k piles

1. (a) * Échauffement :

- $A_2 = P_1 \cap F_2$

Comme P_1 et F_2 indépendants : $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) = pq$

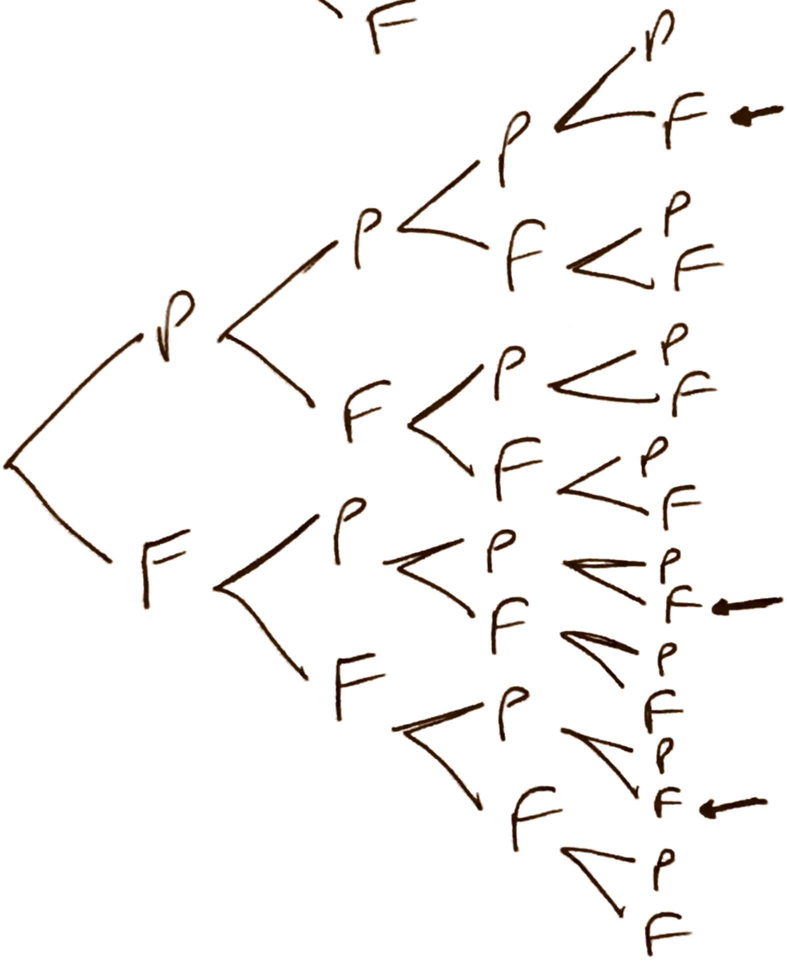
- $A_3 = (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \,\dot{\cup}\, (F_1 \cap P_2 \cap F_3)$



donc $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3)$

$= p^2 q + q^2 p$

$= pq \times (p+q) = pq$

- 

$$\mathbb{P}(A_4) = p^3 q + p^2 q^2 + p q^3 = pq\,\underbrace{(p^2 + pq + p^2)}_{=(p+q)^2 - pq} = pq \times (1 - pq)$$

* <u>Cas général</u>

A_n se produit si on a que des faces puis que des piles jusqu'au $(n-1)$-ième lancer puis face au n-ième lancer.

$$A_n = \biguplus_{k=0}^{n-2} \left(F_1 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n \right)$$

donc comme les lancers sont effectués de manières indépendantes

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=0}^{n-2} p^{n-k-1} \times q^{k+1} = p^{n-1} \times q \times \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

si $p=q=\frac{1}{2}$ $\quad \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n} \times (n-1)$

si $p \neq q$ $\quad \mathbb{P}(A_n) = p^{n-1} \times q \times 1 \times \dfrac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1-\frac{q}{p}}$

$$= p^{n-1} q \times \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q} \times \frac{p}{p^{n-1}}$$

$$\mathbb{P}(A_n) = pq \times \frac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}$$

1.(b) Analyse à un pas = conditionner par rapport au résultat du 1er lancer.

(P_1, F_1) est un sce donc d'après la formule des probabilités totales :

$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(A_n) + \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(A_n)$

or $\mathbb{P}_{P_1}(A_n) = \mathbb{P}(P_2 \cap P_3 \cap \dots \cap P_{n-1} \cap F_n) = p^{n-2} \times q$

$\mathbb{P}_{F_1}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-1})$ [on "oublie" le 1er lancer]

donc $\mathbb{P}(A_n) = q\,\mathbb{P}(A_{n-1}) + p^{n-1} \times q$

Donc $\mathbb{P}(A_n) = q\,\mathbb{P}(A_{n-1}) + p^{n-1} \times q$

$= q\left(q\,\mathbb{P}(A_{n-2}) + p^{n-2} q\right) + q\,p = q^2\,\mathbb{P}(A_{n-2}) + p^{n-2} q^2 + p^{n-1} q$

$= q^3\,\mathbb{P}(A_{n-3}) + p^{n-3} q^3 + p^{n-2} q^2 + p^{n-1} q$

$= \dots$

$= q^{n-2} \times \mathbb{P}(A_2) + p^2 q^{n-2} + p^3 q^{n-3} + \dots + p^{n-1} q$

$= q^{n-2} \times pq + \sum_{k=2}^{n-1} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} p^k q^{n-k}$

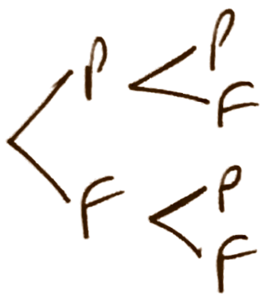
$= q^n \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^k$

si $p=q=\frac{1}{2}$ $\quad \mathbb{P}(A_n)=\frac{1}{2^n}(n-1)$

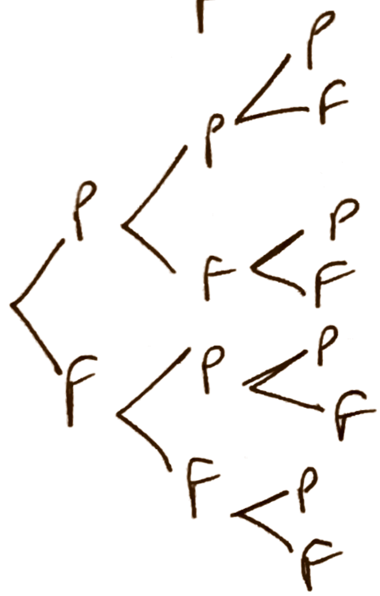
si $p\neq q$ $\quad \mathbb{P}(A_n)=q^n\times\frac{p}{q}\times\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1-\frac{p}{q}} = q^n\times\frac{p}{q}\times\frac{q^{n-1}-p^{n-1}}{q-p}\times\frac{q}{q^{n-1}}$

$$\mathbb{P}(A_n)=pq\,\frac{p^{n-1}-q^{n-1}}{p-q}$$

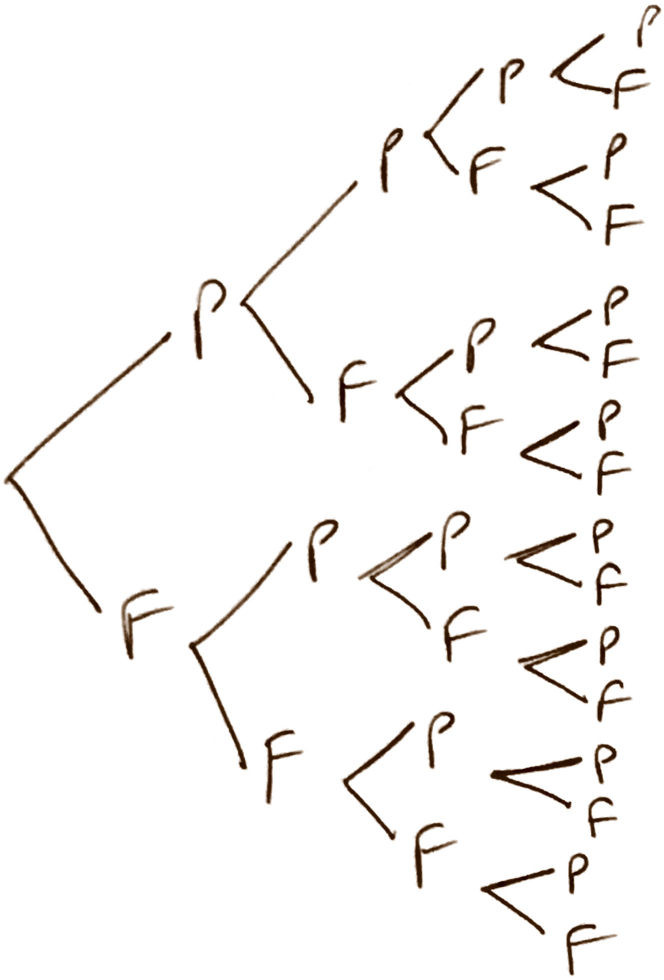
2. * Echauffement



$B_2=P_1\cap P_2$ donc $\mathbb{P}(B_2)=p^2$



$B_3=F_1\cap P_2\cap P_3$ donc $\mathbb{P}(B_3)=p^2q$



$$B_4 = F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4$$

$$\mathbb{P}(B_4) = p^2 q^2$$

* <u>Cas général</u>

$$B_n = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n$$

Comme les lancers sont effectués de manières indépendantes :

$$\mathbb{P}(B_n) = p^2 q^{n-2}$$