TD13 Ex 16

1. $\mathbb{P}(A_1) = \boxed{a}$ (énoncé)

$\overline{A_1} \cap B_2 \subseteq B_2$. Si Bernard gagne au deuxième coup alors Alphonse a perdu au premier : $B_2 \subseteq \overline{A_1}$

et donc : $B_2 \subseteq \overline{A_1} \cap B_2$

Ainsi : $B_2 = \overline{A_1} \cap B_2$

Donc : $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(B_2) = \boxed{(1-a)b}$

Avec le même raisonnement : $A_3 = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap A_3$

Donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(\overline{B_2}) \times \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2}}(A_3) = \boxed{(1-a)ba}$$

De même si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_{2n-1} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{A_{2n-3}} \cap \overline{B_{2n-2}} \cap A_{2n-1}$$

On obtient avec la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(A_{2n-1}) = (1-a)(1-b)\dots(1-a)(1-b)a = \boxed{(1-a)^{n-1} \cdot (1-b)^{n-1} \cdot a}$$

De même $B_{2n} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \dots \cap \overline{A_{2n-1}} \cap B_{2n}$

donc $\mathbb{P}(B_{2n}) = \boxed{(1-a)^n \times (1-b)^{n-1} \times b}$

2. On remarque que $C_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_{2k-1}$

Comme les A_{2k-1} sont 2 à 2 <u>incompatibles</u> (car le jeu s'arrête dès que la cible est atteinte), on a par <u>additivité</u> de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(C_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (1-a)^{k-1} \cdot (1-b)^{k-1} \cdot a$$

$$= a \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \left[(1-a)(1-b)\right]^k \quad \text{(chgt d'indice } k' = k-1\text{)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n) = a \cdot \frac{1 - (1-a)^{n-1} \cdot (1-b)^{n-1}}{1 - (1-a) \cdot (1-b)}}$$

De même $D_n = \biguplus_{k=1}^{n} B_{2k}$ donc $\mathbb{P}(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_{2k})$

donc $\mathbb{P}(D_n) = \sum_{k=1}^{n} (1-a)^k (1-b)^{k-1} b = (1-a) b \sum_{k=0}^{n-1} \left[(1-a)(1-b)\right]^k$

$$\boxed{\mathbb{P}(D_n) = (1-a) b \cdot \frac{1 - (1-a)^n (1-b)^n}{1 - (1-a)(1-b)}}$$

3. Comme $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ on a :

$$(1-a)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$(1-b)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\mathbb{P}(C_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \boxed{\dfrac{a}{a+b-ab} = \alpha}$

$$\mathbb{P}(D_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{(1-a)b}{1-(1-a)(1-b)} = \boxed{\frac{b - a \times b}{a+b-ab} = \beta}$$

$\boxed{\alpha + \beta = 1}$

4. Si $a = \dfrac{1}{3}$: $\quad \alpha = \dfrac{1}{1+3b-b} = \dfrac{1}{1+2b}$

$$\beta = \frac{2b}{1+3b-b} = \frac{2b}{1+2b} = 1 - \alpha$$

Donc $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{1+2b} = \frac{1}{2} \iff 1+2b = 2$

$\iff \boxed{b = \frac{1}{2}}$

Pour $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$, le jeu est équilibré.