Le problème des anniversaires

On modélise la donnée des n dates d'anniversaires par la donnée d'une liste de n entiers entre 1 et 365 :

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{365})$$

où ω_k = date d'anniversaire du k-ième élève

(donc les élèves sont numérotés de 1 à n)

Donc $\Omega = [\![1, 365]\!]^n$

D'après l'énoncé $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme.

1. On note A l'évènement :

A = "au moins deux élèves sont nés le même jour"

$\overline{A}$ = "aucun n'élève n'est né le même jour qu'un autre"

$|\Omega| = 365^n$

$|\overline{A}| = A_{365}^n$ car on choisit n valeurs distinctes parmi 365, avec ordre.

donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{A_{365}^n}{365^n}$

Et donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1 - \dfrac{A_{365}^n}{365^n}}$

Si $n > 365$: $A_{365}^n = 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$

On remarque que :

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{365-n+1}{365}$$

cette formule va permettre de ne pas manipuler des nombres astronomiquement grand avec Python.

```
def Q1(p):
    prod = 1
    n = 1
    while 1 - prod < p:
        prod = prod * (365 - n) / 365
        n = n + 1
    return n
```

Pour $p = 0{,}5$ on trouve $n = 24$ et pour $p = 0{,}8$ on trouve $n = 36$.

2. On note B l'évènement :

$B =$ "au moins un élève est né le même jour que le prof"

$\overline{B} =$ "aucun élève n'est né le même jour que le prof"

Cette fois $|\overline{B}| = 364^n$ car on choisit n dates avec répétitions autorisées, avec ordre, et différente de celle du prof.

Donc $\boxed{\mathbb{P}(B) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n}$

```
def Q2(p):
    prod = 1
    n = 1
    while 1 - prod < p:
        prod = prod x 364/365
        n = n+1
    return n
```

$p = 0{,}5$ donne $n = 254$ et $p = 0{,}8$ donne $n = 588$