

$$* \mathcal{F}_1 = (\underbrace{(0,1,2)}_{\vec{u}_1}, \underbrace{(1,3,0)}_{\vec{u}_2}, \underbrace{(2,0,1)}_{\vec{u}_3})$$

\mathcal{F}_1 est-elle libre ?

Soient d_1, d_2, d_3 réels tels que :

$$d_1 \vec{u}_1 + d_2 \vec{u}_2 + d_3 \vec{u}_3 = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d_2 + 2d_3 = 0 \\ d_1 + 2d_2 = 0 \\ 2d_1 + d_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

Donc la famille de vecteurs \mathcal{F}_1 est libre.

Comme $\text{Card}(\mathcal{F}_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ elle est libre

maximale dans \mathbb{R}^3 donc elle est une base de \mathbb{R}^3

$$* \text{Card}(\mathcal{F}_2) = 4 > \dim(\mathbb{R}^3) = 3.$$

Donc \mathcal{F}_2 est liée et donc \mathcal{F}_2 n'est pas une base de \mathbb{R}^3