TD 14 exo 15

Soit $\mathbb{H}$ un sev de $\mathbb{E}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $\mathbb{H}$ est un hyperplan de $\mathbb{E}$.

Il existe donc $\mathbb{D}$ droite vectorielle telle que

$$\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{D}$$

On a donc $\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{H} + \dim \mathbb{D}$

et donc $\underline{\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{E}) - 1}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\dim(\mathbb{H}) = \dim(\mathbb{E}) - 1$

On a $\mathbb{H} \subseteq \mathbb{E}$ et $\dim(\mathbb{H}) \neq \dim(\mathbb{E})$

donc $\mathbb{H} \subsetneq \mathbb{E}$.

Donc $\exists u \in \mathbb{E}$; $u \notin \mathbb{H}$.

On note $\mathbb{D} = \mathrm{Vect}(u)$.

Comme $u \notin \mathbb{H}$ on a $u \neq 0_E$ et donc $\mathbb{D}$ est une <u>droite vectorielle</u>.

De plus $\underline{\dim(\mathbb{H}) + \dim(\mathbb{D}) = \dim(\mathbb{E})}$

D'autre part $\mathbb{H} \cap \mathbb{D} \supseteq \{0_E\}$ car $\mathbb{H}$ et $\mathbb{D}$ sont des sev de $\mathbb{E}$.

Réciproquement si $v \in \mathbb{H} \cap \mathbb{D}$:

$v \in \mathbb{D}$ donne que $\exists \lambda \in \mathbb{K}$; $v = \lambda . u$

Si $\lambda \neq 0$ on aurait $u = \frac{1}{\lambda} . v \in \mathbb{H}$ car $v \in \mathbb{H}$,

ce qui est absurde.

Donc $\lambda = 0$ et donc $v = 0_E$. Ainsi $\underline{\mathbb{H} \cap \mathbb{D} = \{0_E\}}$

On a donc $\underline{\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{D}}$: $\boxed{\mathbb{H} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{E}.}$