1. On note $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

* Les sev sont de dim finie $\leq n^2$ car $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))=n^2$.

* $T_n^+(\mathbb{K})$ est engendré par la famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ qui est libre (sous-famille d'une famille libre) donc est une base de $T_n^+(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\dim(T_n^+(\mathbb{K}))=\frac{n(n+1)}{2}}$$

* De même une base de $T_n^-(\mathbb{K})$ est $(E_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$

donc $\boxed{\dim(T_n^-(\mathbb{K}))=\frac{n(n+1)}{2}}$

* $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est engendré par $(E_{i,i})_{1\leq i\leq n} \vee (E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ qui est libre (évident) donc est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))=n+\binom{n}{2}=n+\frac{n(n-1)}{2}=\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

* $A_n(\mathbb{K})$ est engendré par $(E_{i,j}-E_{j,i})_{1\leq i<j\leq n}$ qui est libre (évident) donc est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))=\binom{n}{2}=\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$

2. Rappel : $\begin{cases} \text{si } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 \text{ on a vu que :} \\ Tr(\alpha A + B) = \alpha \times Tr(A) + Tr(B) \end{cases}$

* $O_n \in \mathbb{H}$ car $Tr(O_n) = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$
* Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(A,B) \in \mathbb{H}^2$.

  On a donc $Tr(A) = Tr(B) = 0$.

  Donc $Tr(\alpha . A + B) = \alpha \times Tr(A) + Tr(B)$
  $= \alpha \times 0 + 0 = 0$

  Donc $\alpha . A + B \in \mathbb{H}$
* Par le th de caractérisation : $\boxed{\mathbb{H} \text{ est un sev de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

Et donc $\dim(\mathbb{H}) \leq n^2$.

$\mathbb{H}$ est engendré par $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i \neq j}} \vee (E_{n,n} - E_{i,i})_{1 \leq i \leq n-1}$

qui est libre (évident) donc :

$$\dim(\mathbb{H}) = (n^2 - n) + n - 1 = \boxed{n^2 - 1}$$