1. * $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 - \cdots - x_n \\ x_2 \text{ qcq} \\ \vdots \\ x_{n-1} \text{ qcq} \\ x_n \text{ qcq} \end{cases}$$

Donc $\mathbb{E} = \mathrm{Vect}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_{n-1}})$

où $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\vec{u_k} = (-1, 0, \dots, 0, \underset{\uparrow}{1}, 0, \dots, 0)$

k+1-ième

Ceci prouve que $\mathbb{E}$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.

De plus la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}})$ est libre car de coordonnées échelonnées dans la base canonique.

Donc la famille $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}})$ est une base de $\mathbb{E}$.

* $\mathbb{F} = \{ \lambda . (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n ; \lambda \in \mathbb{K} \} = \mathrm{Vect}(\vec{u_n})$

où $\vec{u_n} = (1, 1, \dots, 1)$. Donc $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.

Comme $\vec{u_n} \neq \vec{0}$ la famille $(\vec{u_n})$ est libre et est donc une base de $\mathbb{F}$.

2. * On a déjà montré que $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sev de $\mathbb{K}^n$.

* $\dim(\mathbb{E}) + \dim(\mathbb{F}) = \text{Card}(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{n-1}}) + \text{Card}(\vec{u_n})$

$$= (n-1) + 1 = n = \dim(\mathbb{K}^n)$$

* Soit $\vec{v} \in \mathbb{E} \cap \mathbb{F}$.

Comme $\vec{v} \in \mathbb{F}$: $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \vec{v} = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$

Comme $\vec{v} \in \mathbb{E}$: $\alpha + \alpha + \dots + \alpha = 0$

donc $n\alpha = 0$

donc $\alpha = 0$

Donc $\vec{v} = (0, \dots, 0) = \vec{0}$

Ainsi $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} \subseteq \{\vec{0}\}$

Comme $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont des sev de $\mathbb{K}^n$: $\mathbb{E} \cap \mathbb{F} = \{\vec{0}\}$

* Par caractérisation des sev supplémentaires en dim finie :

$$\boxed{\mathbb{E} \oplus \mathbb{F} = \mathbb{K}^n}$$