On suppose $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \int_a^b f(t) \times \sin(nt)\, dt$.

<u>but</u> $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

On intègre par parties :

$$I_n = \int_a^b f(t) \times \sin(nt)\, dt = \left[f(t) \times \frac{-1}{n} \cos(nt) \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \times \frac{-1}{n} \cos(nt)\, dt$$

$$= \frac{1}{n} \Big(\underbrace{-f(b) \times \cos(nb) + f(a) \times \cos(na)}_{\overset{\text{def}}{=} u_n} \Big) + \frac{1}{n} \times \underbrace{\int_a^b f'(t) \times \cos(nt)\, dt}_{\overset{\text{def}}{=} v_n}$$

Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Comme f est de classe C^1 sur $[a,b]$, les fonctions $|f|$ et $|f'|$ sont continues sur $[a,b]$. D'après le th des bornes atteintes on peut poser :

$$M_0 \overset{\text{def}}{=} \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \quad \text{et} \quad M_1 \overset{\text{def}}{=} \max_{a \leq t \leq b} |f'(t)|$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq |f(a) \times \cos(na)| + |f(b) \times \cos(nb)|$

$= |f(a)| \times |\cos(na)| + |f(b)| \times |\cos(nb)|$

Mais $|\cos(na)| \leq 1$ donc $|f(a)| \times |\cos(na)| \leq |f(a)|$

et de même $|f(b)| \times |\cos(nb)| \leq |f(b)|$

Par somme d'inégalités :

$|f(a)\cos(na)| + |f(b)\cos(nb)| \leq |f(a)| + |f(b)| \leq 2M_0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq 2M_0$ ← dépend de f, a, b mais pas de n

Donc la suite (u_n) est bornée.

D'après l'inégalité triangulaire pour $\int$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq \int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,dt$

On a $\forall t \in [a;b], \quad |f'(t)\cos(nt)| \leq |f'(t)| \leq M_1$

donc par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b |f'(t)\cos(nt)|\,dt \leq \int_a^b M_1\,dt = M_1 \times (b-a)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq M_1 \times (b-a)$ ← ne dépend pas de n

Donc la suite (v_n) est bornée.

On sait donc que $\frac{1}{n} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n} v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Par somme de limites : $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 + 0$

donc $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Rem 1 : ce résultat reste vrai si on suppose seulement f C^0 sur $[a,b]$ mais il est beaucoup plus dur à démontrer (voir par exemple CCINP PSI 2017)

Rem 2 On montre de même que :

$$\int_a^b f(t) \times \cos(nt) \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$