TD 15 Ex 18

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, positive et décroissante.

$g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

On pose $\forall x \in [a,b]$, $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$

1. C'est le théorème fondamental de l'analyse.

De plus $\forall x \in [a,b]$, $G'(x) = g(x)$

2. G est continue sur le segment $[a,b]$ puisqu'elle est de classe C^1.

On sait donc que $G([a,b])$ est un segment :

$$\underline{G([a,b]) = [m, M]} \quad \text{où } (m, M) \in \mathbb{R}^2.$$

De plus $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} G(x)$ et $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} G(x)$

3. Comme f et G sont C^1 sur $[a,b]$ on a par IPP :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \Big[f(t)\,G(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)\,G(t)\,dt$$

$$= f(b) \times G(b) - 0 - \int_a^b f'(t)\,G(t)\,dt$$

car $G(a) = 0$

4. $\forall t \in [a,b]$, $m \leq G(t) \leq M$

donc $m \cdot f'(t) \geq f'(t) \times G(t) \geq M \times f'(t)$

puisque $f'(t) \leq 0$ car $f \searrow$ sur $[a,b]$

Donc $m.\left(f(b)-f(a)\right) \geqslant \int_a^b f'(t)G(t)\,dt \geqslant M_\times\left(f(b)-f(a)\right)$ ②

Donc $\underbrace{f(b)G(b)-m_\times f(b)+m_\times f(a)}_{=\underbrace{\underbrace{f(b)}_{\geqslant 0}\times\underbrace{(G(b)-m)}_{\geqslant 0}}_{\geqslant 0}} \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant \underbrace{f(b)_\times G(b)-M_\times f(b)+M_\times f(a)}_{=\underbrace{\underbrace{f(b)}_{\geqslant 0}\times\underbrace{(G(b)-M)}_{\leqslant 0}}_{\leqslant 0}}$

Donc $m_\times f(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M_\times f(a)$

5. • Si $f(a)=0$. Comme $f\geqslant 0$ et ↘ alors

$\forall t\in[a,b],\ f(t)=0$

On veut montrer que $0=0$ donc tout $c\in[a,b]$ convient.

• Si $f(a)>0$.

$$m \leqslant \frac{1}{f(a)}\times\int_a^b f(t)g(t)\,dt \leqslant M$$

Comme m et M sont 2 valeurs prises par G sur $[a,b]$ et comme G est continue sur $[a,b]$, le TVI assure que $\frac{1}{f(a)}\times\int_a^b f(t)g(t)\,dt$ est une valeur prise par G sur $[a,b]$.

Donc $\exists c\in[a,b],\ G(c)=\frac{1}{f(a)}\times\int_a^b f(t)g(t)\,dt$

Dans les 2 cas :

$$\boxed{\exists c \in [a,b],\quad \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = f(a) \times \int_a^c g(t)\,dt}$$

6. On pose $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = 1 - \cos t$.

Si $0 < a < b$ alors f et g vérifie les hypothèses ad hoc.

Donc $\exists c \in [a,b]$, $\int_a^b \frac{1 - \cos t}{t}\,dt = \frac{1}{a} \times \int_a^c (1 - \cos t)\,dt$

$$= \frac{1}{a}\left(c - a - \sin c + \sin a \right)$$

Donc : $$\boxed{\int_a^b \frac{1-\cos t}{t}\,dt \leq \frac{1}{a}\left(b - a + 2 \right)}$$

7. De même si $x > 1$ alors $0 < \frac{1}{x} < 1$ et :

$\exists c \in \left[\frac{1}{x}, 1\right]$, $\int_{1/x}^1 \frac{1}{t} \times \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{x}} \times \int_{1/x}^c \frac{\sin t}{t}\,dt$

donc $\frac{1}{x^2} \times \int_{1/x}^1 \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{1}{x} \times \int_{1/x}^c \frac{\sin t}{t}\,dt$

L'inégalité des accroissements finis donne $\forall t \geq 0$, $\sin t \leq t$

donc $\forall x > 1$, $\int_{1/x}^c \frac{\sin t}{t}\,dt \leq c - \frac{1}{x} \leq 1 - \frac{1}{x}$

Donc $\forall x > 1$, $0 \leq \frac{1}{x^2} \cdot \int_{1/x}^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

Donc $$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} \times \int_{1/x}^1 \frac{\sin t}{t}\,dt = 0}$$