1. Soit $x \in]0,1[$.

La fonction $t \overset{f}{\longmapsto} \ln(1-t)$ est C^∞ sur $]-\infty,1[$ donc continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$.

D'après le TAF il existe $c \in]0,x[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad \text{ie} \quad \frac{-1}{1-c} = \frac{\ln(1-x)}{x}$$

Or $0 < c < x < 1$

donc $0 < 1-x < 1-c < 1$

donc $1 < \frac{1}{1-c} < \frac{1}{1-x}$

donc $-\frac{1}{1-x} < \frac{\ln(1-x)}{x} < -1$

Donc comme $x > 0$: $\boxed{-\frac{x}{1-x} \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x}$

2. On fixe $j \in [\![1, n-p-1]\!]$

Pour tout $t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$ on a : $0 \leqslant \frac{j}{n} \leqslant t$

donc $\left(\frac{j}{n}\right)^n \leqslant t^n$

par croissance sur $\mathbb{R}^+$ de $x \longmapsto x^n$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{j/n}^{(j+1)/n} \left(\frac{j}{n}\right)^n dt \leqslant \int_{j/n}^{(j+1)/n} t^n \, dt$$

ie $\quad \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{j}{n}\right)^n \leqslant \displaystyle\int_{j/n}^{(j+1)/n} t^n \, dt$

donc $\boxed{\left(\dfrac{j}{n}\right)^n \leqslant n \times \displaystyle\int_{j/n}^{(j+1)/n} t^n \, dt}$

On somme ces inégalités pour j allant de 1 à $n-p-1$. La relation de Chasles nous donne :

$$v_{n,p} \leqslant n \cdot \int_{1/n}^{(n-p)/n} t^n \, dt$$

Mais si $t \in \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{n-p}{n}\right]$ alors $\quad 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{p}{n}$

donc $\quad t^n \leqslant \left(1 - \dfrac{p}{n}\right)^n$

Par croissance de l'intégrale :

$\leqslant 1$ car $p \leqslant n-2$

$$\int_{1/n}^{(n-p)/n} t^n \, dt \leqslant \int_{1/n}^{(n-p)/n} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n dt = \frac{n-p-1}{n} \times \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\left(1 - \frac{p}{n}\right)^n$$

donc on arrive à : $v_{n,p} \leq \left(1-\frac{p}{n}\right)^n$

Et il est évident que : $0 \leq v_{n,p}$.

Donc $0 \leq v_{n,p} \leq \left(1-\frac{p}{n}\right)^n$

De plus $\left(1-\frac{p}{n}\right)^n = e^{n \times \ln\left(1-\frac{p}{n}\right)}$

or $0 < \frac{p}{n} < 1$ donc d'après 1. on a $\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) \leq -\frac{p}{n}$

donc $n.\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) \leq -p$

et par croissance de exp sur $\mathbb{R}$: $\left(1-\frac{p}{n}\right)^n \leq e^{-p}$

Ainsi $\boxed{0 \leq v_{n,p} \leq e^{-p}}$

3. Pour $k \in [\![1,p]\!]$ on a : $0 < k \leq p < n$ donc $0 < \frac{k}{n} < 1$

donc $\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} \leq e^{n \times \left(-\frac{k}{n}\right)} = e^{-k}$

Et c'est vrai pour $k=0$.

Si on somme pour k allant de 0 à p :

$$w_{n,p} \leq \sum_{k=0}^{p} e^{-k} = \sum_{k=0}^{p} (e^{-1})^k = \frac{1-(e^{-1})^{p+1}}{1-e^{-1}}$$

$$= \frac{1-e^{-(p+1)}}{1-e^{-1}}$$

* De même pour $k \in [\![1, p]\!]$:

$$\left(1-\frac{k}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)} \geqslant e^{n \times \frac{-k/n}{1-k/n}} = e^{\frac{-k}{1-k/n}}$$

et c'est vrai pour $k=0$

Donc si on somme pour k allant de 0 à p :

$$w_{n,p} \geq \sum_{k=0}^{p} e^{\frac{-k}{1-k/n}}$$

On a $\boxed{\sum_{k=0}^{p} e^{\frac{-k}{1-k/n}} \leqslant w_{n,p} \leqslant \frac{1}{1-e^{-1}}}$

4. On fixe $p \in \mathbb{N}$.

Les inégalités de 2. et 3. sont alors vraies pour tout $n \geqslant p+2$.

De plus $w_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{n-k}{n}\right)^n \underset{k'=n-k}{=} \sum_{k=n-p}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$

Donc $u_n = u_{n,p} + w_{n,p}$

Donc $\forall n \geqslant p+2$, $\sum_{k=0}^{p} e^{\frac{-k}{1-k/n}} \leqslant u_n \leqslant e^{-p} + \frac{1}{1-e^{-1}}$

On fixe $\varepsilon > 0$.

On choisit l'entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tq $e^{-p_0} \leq \varepsilon$

(ce qui est possible car $e^{-p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$)

On a alors $\forall n \geq p_0 + 2$, $\sum_{k=0}^{p_0} e^{\frac{-k}{1-\frac{k}{n}}} \leq u_n \leq \varepsilon + \frac{1}{1-e^{-1}}$

On pose $\varepsilon' = \frac{1-2e^{-1}}{(1-e^{-1}) \times (p_0+1)} > 0$ (ce choix sera justifié en fin de calcul)

Ensuite on fixe $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tq

$$\forall n \geq n_0(k), \left| e^{\frac{-k}{1-k/n}} - e^{-k} \right| \leq \varepsilon'$$

(possible car $e^{\frac{-k}{1-k/n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-k}$)

On pose $n_1 = \max\{n_0(0), n_0(1), \dots, n_0(p_0), p_0+2\}$

On a $\forall n \geq n_1$, $\sum_{k=0}^{p_0} e^{\frac{-k}{1-k/n}} \geq \sum_{k=0}^{p_0} \left(e^{-k} - \varepsilon'\right)$

tous les inégalités précédentes sont vraies

$$= \frac{1-e^{-p_0-1}}{1-e^{-1}} - \varepsilon'(p_0+1)$$

Or $\frac{1-e^{-p_0-1}}{1-e^{-1}} - \varepsilon' = \frac{1}{1-e^{-1}} - e^{-p_0} \times \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} - \varepsilon' \times (p_0+1)$

$$\geq \frac{1}{1-e^{-1}} \underbrace{- \varepsilon \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} - (p_0+1)\varepsilon'}_{= -\varepsilon \text{ par def de } \varepsilon'}$$

Donc $\forall n \geqslant n_1$, $\frac{1}{1-e^{-1}} - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{1-e^{-1}} + \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geqslant n_1$, $\left| u_n - \frac{1}{1-e^{-1}} \right| \leqslant \varepsilon$

Donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-e^{-1}}}$