1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $t \in [0,1]$ on a $1+t^2 \geqslant 1 > 0$

donc $0 \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant 1$

donc $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ puisque $t^n \geqslant 0$

Par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

Comme $0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et $\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ on a :

$$\boxed{I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$J_n = \int_0^1 \underbrace{t^n}_{u'(t)} \times \underbrace{\ln(1+t^2)}_{v(t)} \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \ln(1+t^2) \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \cdot \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{1+t^2} \, dt$$

$$= \frac{\ln 2}{n+1} - 0 - \frac{2}{n+1} \cdot I_{n+2}$$

$\begin{cases} u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \\ v'(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$

L'IPP est licite car u et v sont C^1 sur $[0,1]$

Comme $I_{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ on a :

$$n \times J_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \times \ln 2 - 2 \times 1 \times 0 = \ln 2$$

Comme $\ln 2 \neq 0$: $n J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln 2$ et donc $\boxed{J_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}}$