On note $u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$

$u_2 = (1,1,1)_{\mathcal{B}}$

$u_3 = (1,2,0)_{\mathcal{B}}$

La famille (u_2, u_3, u_1) est à coordonnées échelonnées donc elle est libre. Comme $\dim \mathbb{E} = 3$, elle est une base de $\mathbb{E}$. Il en est de même pour (u_1, u_2, u_3)

Or (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{F}$ et (u_3) est une base de $\mathbb{G}$.

On a donc $\boxed{\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}}$. On note p la projection sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.

Soit $v = (x, y, z)_{\mathcal{B}} \in \mathbb{E}$.

On pose $(\alpha, \beta, \gamma)_{\mathcal{B}}$ les coordonnées de $p(v) = p(x,y,z)$.

On a $\begin{cases} p(v) \in \mathbb{F} \\ v - p(v) \in \mathbb{G} \end{cases}$

Donc $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 ; \ p(v) = a u_1 + b u_2$

et $\exists c \in \mathbb{R} ; \ v - p(v) = c . u_3$

On obtient $\begin{cases} \alpha = a + b \\ \beta = b \\ \gamma = b \\ x - \alpha = c \\ y - \beta = 2c \\ z - \gamma = 0 \end{cases}$

On cherche α, β, γ en fonction de x, y et z.

Alors $\gamma = z$ avec L_6

puis $\beta = z$ avec L_2 et L_3

Ensuite L_5 donne $c = \frac{1}{2}(y - z)$

et L_4 donne $\alpha = x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$

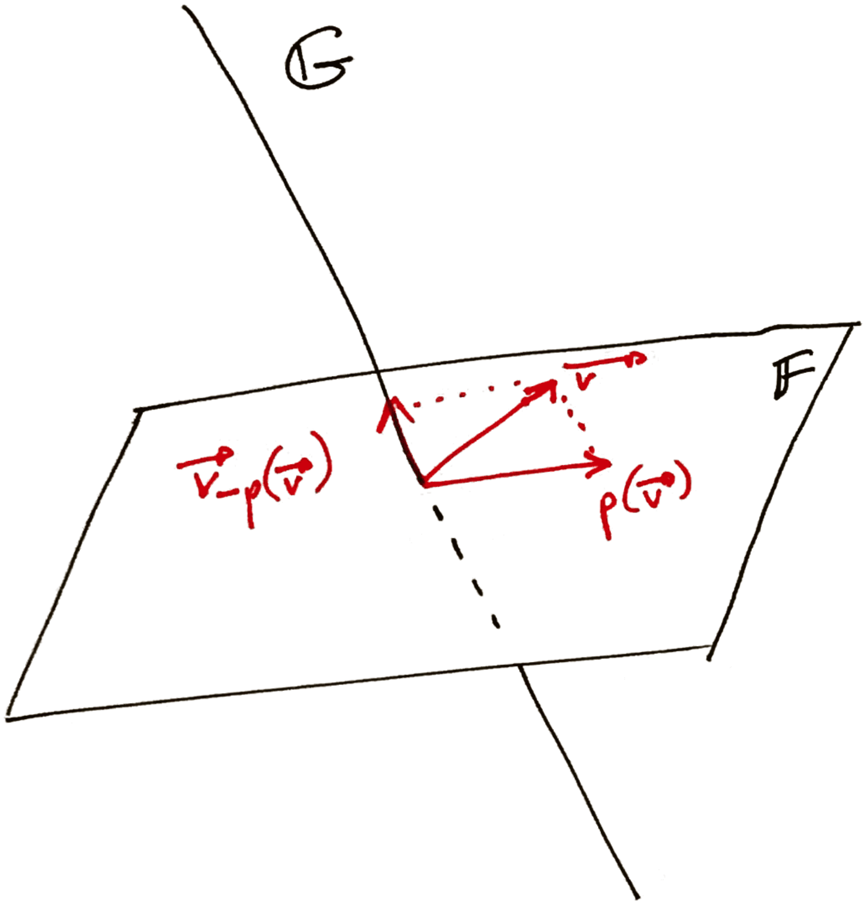
Donc $\boxed{p(x, y, z) = \left(x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, z, z\right)}$

Si on note s la symétrie par rapport à $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$ alors $s = 2p - id$ donc :

$$\boxed{s(x, y, z) = (x - y + z, -y + 2z, z)}$$

vérification : on trouve bien $p(u_1) = u_1$, $p(u_2) = u_2$, $p(u_3) = 0$

$s(u_1) = u_1$, $s(u_2) = u_2$, $s(u_3) = -u_3$



$$\vec{v} = \underbrace{p(\vec{v})}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{\vec{v} - p(\vec{v})}_{\in \mathbb{G}}$$

et si $\vec{w} \in \mathbb{F}$ vérifie $\vec{v} - \vec{w} \in \mathbb{G}$

alors $\vec{w} = p(\vec{v})$

par unicité de la décomposition de

$\vec{v}$ dans $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$