1. $p+q \in \mathcal{L}(E)$ car $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$.

On a $(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + p\circ q + q \circ p = q$

car $p^2 = p$ et $q^2 = q$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $p \circ q = q \circ p = 0$ alors $(p+q)^2 = p+q$

donc $p+q$ est un projecteur.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $p+q$ est un projecteur alors $(p+q)^2 = p+q$

donc $p\circ q + q \circ p = 0$ donc $p \circ q = -q \circ p$ $(*)$

On compose par p ou par q, à droite ou à gauche :

$$\begin{cases} p\circ q = -p \circ q \circ p \\ q \circ p \circ q = -q \circ p \end{cases} \text{ à gauche}$$
$$\begin{cases} p \circ q \circ p = -q \circ p \\ p \circ q = -q \circ p \circ q \end{cases} \text{ à droite}$$

Donc $p \circ q \underset{L_1}{=} -p \circ q \circ p \underset{L_3}{=} q \circ p$ $(**)$

Les relations $(*)$ et $(**)$ donnent : $p \circ q = q \circ p = 0$

Ainsi : $\boxed{p+q \text{ est un projecteur} \iff p \circ q = q \circ p = 0}$

2. Si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ alors $p(x) = q(x) = 0$

donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$

donc $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$.

On a donc $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \subseteq \mathrm{Ker}(p+q)$. (inclusion évidente)

Si $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$ alors $p(x) + q(x) = 0$

Donc $p(p(x) + q(x)) = p(0) = 0$ car p linéaire

donc $p(x) + p(q(x)) = 0$ car $p^2 = p$

donc $p(x) = 0$ car $p \circ q = 0$

et donc $q(x) = 0$

On a donc $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

On a donc $\mathrm{Ker}(p+q) \subseteq \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Par double-inclusion $\boxed{\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)}$

Si $y \in \mathrm{Im}(p+q)$ alors $\exists x \in E$, $y = p(x) + q(x)$.

On $p(x) \in \mathrm{Im}\, p$ et $q(x) \in \mathrm{Im}\, q$

donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

On a donc $\mathrm{Im}(p+q) \subseteq \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ (inclusion évidente)

Si $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Alors $\exists (y_1, y_2) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Im}(q)$, $y = y_1 + y_2$.

Comme $y_1 \in \mathrm{Im}(p)$ alors $\exists x_1 \in E$, $y_1 = p(x_1)$

De même $y_2 \in \mathrm{Im}(q)$ donc $\exists x_2 \in E$, $y_2 = q(x_2)$.

On a donc $y = p(x_1) + q(x_2)$ ⚠ à priori $x_1 \neq x_2$

Donc $p(y) = p^2(x_1) + p(q(x_2))$ car p linéaire

$= p(x_1) + 0$ car $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$

$= p(x_1)$

De même $q(y) = q(x_2)$

Donc on a $y = p(y) + q(y)$

donc $y = (p+q)(y) \in \mathrm{Im}(p+q)$

Donc $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) \subseteq \mathrm{Im}(p+q)$.

Par double inclusion: $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Enfin si $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ alors $\exists (x_1, x_2) \in E^2$ tq

$y = p(x_1) = q(x_2)$

Donc $p(y) = p^2(x_1) = p(x_1)$ et $p(y) = p(q(x_2)) = 0$ car $p \circ q = 0$

$= y$

Donc $y = 0$. Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \subseteq \{0\}$.

Comme $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont des sev de E : $0 \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$

Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$.

Donc $\mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)}$