TD 16 Ex 2

1. $f(0,0,0) = (0,0,1) \neq (0,0,0)$ donc f n'est pas linéaire

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u,v) \in (\mathbb{R}^4)^2$.

On note $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$.

$\lambda u + v = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2, \lambda t_1 + t_2)$

donc $\varphi(\lambda u + v) = (\lambda x_1 + x_2 - \lambda y_1 - y_2 + \lambda t_1 + t_2, 2\lambda x_1 + 2x_2 + \lambda y_1 + y_2 - \lambda z_1 - z_2, \lambda y_1 + y_2 + \lambda z_1 + z_2)$

$= \lambda(x_1 - y_1 + t_1, 2x_1 + y_1 - z_1, y_1 + z_1) + (x_2 - y_2 + t_2, 2x_2 + y_2 - z_2, y_2 + z_2)$

ie $\varphi(\lambda u + v) = \lambda . \varphi(u) + \varphi(v)$

Donc $\boxed{\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)}$

Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$(x,y,z,t) \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \begin{cases} \boxed{x} - y + t = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} - y + t = 0 \\ 3y - z \boxed{-2t} = 0 \\ y + \boxed{z} = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = -y \\ y \text{ qcq} \\ z = -y \\ t = 2y \end{cases}$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}\left((-1,1,-1,2)\right)}$ et $\dim(\operatorname{Ker} \varphi) = 1$

$$\operatorname{Im}(\varphi) = \{ \varphi(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \{ (x-y+t,\ 2x+y-z,\ y+z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \operatorname{Vect}\left(\underbrace{(1,2,0)}_{V_1} ; \underbrace{(-1,1,1)}_{V_2} ; \underbrace{(0,-1,1)}_{V_3} ; \underbrace{(1,0,0)}_{V_4}\right)$$

$$= \operatorname{Vect}(V_1, V_3, V_4) \quad \text{car } V_2 = V_3 + V_1 - 2V_4$$

or (V_1, V_3, V_4) est libre puisque (V_3, V_1, V_4) est échelonnée.

Donc $\dim(\operatorname{Im} \varphi) = 3$. Or $\operatorname{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}^3$ et $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

On a donc $\boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^3}$

Donc φ est surjective de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ mais n'est pas injective.