TD16 Ex 19

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$:

$$\varphi(\alpha P+Q) = (\alpha P(x_0)+Q(x_0), \dots, \alpha P(x_n)+Q(x_n))$$
$$= \alpha.(P(x_0), \dots, P(x_n)) + (Q(x_0), \dots, Q(x_n))$$
$$= \alpha.\varphi(P)+\varphi(Q)$$

donc φ est linéaire.

De plus si $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ alors :

$$P(x_0) = \dots = P(x_n) = 0$$

Mais les réels $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.
Le polynôme P a donc au moins $n+1$ racines.
Comme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $\deg P \leq n$. On sait donc que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
Donc φ est injective.
Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$ on sait par théorème que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. φ est donc bijective :

$\forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P) = (y_0, \dots, y_n)$

donc $\forall (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], P(x_0) = y_0$ et ... et $P(x_n) = y_n$

3. On note $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

On remarque que $\forall k \in [\![0,n]\!], \varphi(L_k) = e_k$

donc $L_k = \varphi^{-1}(e_k)$

Comme $(e_0, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ et comme φ^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ vers $\mathbb{R}_n[X]$, on sait par théorème que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors dans $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\left(P(x_0), \dots, P(x_n)\right) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k).e_k = \varphi(P)$$

Comme φ^{-1} est linéaire :

$$P = \varphi^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} P(x_k).e_k\right) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k).\varphi^{-1}(e_k)$$

ie $$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k).L_k$$

Les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ sont donc $\left(P(x_0), \dots, P(x_n)\right)$