PROBLEME 2

1.(a) Δ va de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(P_1, P_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$:

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha.P_1 + P_2) &= \alpha P_1(X+1) + P_2(X+1) - \alpha P_1(X) - P_2(X) \\ &= \alpha.\left(P_1(X+1) - P_1(X)\right) + P_2(X+1) - P_2(X) \\ &= \alpha.\Delta(P_1) + \Delta(P_2)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])}$

1.(b) • Si $P \in \mathbb{K}_0[X]$ alors $\underline{\Delta(P) = 0}$

• Si $\deg P \geq 1$.

Alors $P = \lambda X^d + \alpha X^{d-1} + \underbrace{\text{termes de degré} \leq d-2}_{=0 \text{ si } d=1}$

où $\begin{cases}\lambda \in \mathbb{K}^* \text{ et } d \in \mathbb{N}^*. \\ \alpha \in \mathbb{K}\end{cases}$

donc d'après la formule du binôme :

$$P(X+1) = \lambda.X^d + d\lambda X^{d-1} + \alpha X^{d-1} + \text{termes de degré} \leq d-2$$

donc $\Delta(P) = \lambda d X^{d-1} + \text{termes de degré} \leq d-2$

Comme $\lambda \neq 0$ et $d \neq 0$ on a $\deg \Delta(P) = d-1$

Donc $\underline{\deg \Delta(P) = \deg(P) - 1}$

2.(a) D'après 1.(b), si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $\Delta(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.

Donc Δ_n va de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.

De plus Δ_n est linéaire (car Δ l'est).

Donc $\boxed{\Delta_n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X])}$

2.(b) si $P \in \operatorname{Ker} \Delta_n$ alors $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\Delta(P) = 0_{\mathbb{K}[X]}$

D'après 1.(b) : P est constant

(car si P est non constant alors $\deg \Delta(P) \geqslant 0$)

donc $\operatorname{Ker} \Delta_n \subseteq \mathbb{K}_0[X]$ et l'inclusion réciproque est immédiate.

Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{K}_0[X]}$.

2.(c) D'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{K}_n[X]) = \dim(\operatorname{Ker} \Delta_n) + \operatorname{rg}(\Delta_n)$$

donc $\operatorname{rg}(\Delta_n) = n+1-1 = n$

Mais d'après 1.(b) : $\operatorname{Im}(\Delta_n) \subseteq \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Or $\dim(\operatorname{Im} \Delta_n) = n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$

On sait donc que : $\boxed{\operatorname{Im}(\Delta_n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]}$

3. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.

- si $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\Delta(0_{\mathbb{K}[X]}) = Q$
- si $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ alors $\deg(Q) \in \mathbb{N}$.

  on pose $n = 1 + \deg(Q)$.

Alors $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(\Delta_n)$

donc $\exists P \in \mathbb{K}_n[X],\ \Delta(P) = Q$.

Dans les 2 cas : $\exists P \in \mathbb{K}[X],\ \Delta(P) = Q$.

Ceci prouve que <u>Δ est surjective de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathbb{K}[X]$</u>