1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \Psi(\lambda f+g)(x) = (\lambda f+g)(x) + (\lambda f+g)(-x)$$
$$= \lambda . f(x) + g(x) + \lambda . f(-x) + g(-x)$$
$$= \lambda . \Psi(f)(x) + \Psi(g)(x)$$

Donc $\Psi(\lambda f+g) = \lambda . \Psi(f) + \Psi(g)$

Comme Ψ à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$

Pour $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$$f \in \mathrm{Ker}(\Psi) \iff \Psi(f) = 0$$
$$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(-x) = 0$$
$$\iff f \text{ est impaire.}$$

Donc $\boxed{\mathrm{Ker}(\Psi) = \{ f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ;\ f \text{ est impaire} \}}$

Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$. Alors $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ;\ \Psi(f) = g$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + f(-x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$

Donc g est paire.

Ainsi $\mathrm{Im}(\Psi) \subset \{ g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ;\ g \text{ est paire} \}$

Soit $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction paire.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + g(-x) = 2g(x)$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}g(-x)$

Donc $g = \Psi\left(\frac{g}{2}\right)$ et donc $g \in \operatorname{Im}\Psi$.

Ainsi $\boxed{\operatorname{Im}(\Psi) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ;\ g \text{ est paire}\}}$

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$.

Alors $\varphi(\lambda f + g) = (\lambda . f + g)(1) = \lambda . f(1) + g(1) = \lambda . \varphi(f) + \varphi(g)$

Comme φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$: φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Pour $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

$f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff f(1) = 0$

Donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} ;\ f \text{ s'annule en } 1\}}$

Mq $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ ie que φ est surjective.

Si $c \in \mathbb{R}$ alors $c = f(1)$ pour f fonction constante égale à c

Donc $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \varphi(f) = c$.

Donc φ est surjective donc $\boxed{\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{R}}$