1. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$

$\qquad P \longmapsto P - X^3 P'$

On admet que f est linéaire.

La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathcal{B}_{cano} = (1, X, X^2)$
et celle de $\mathbb{R}_4[X]$ est $(1, X, X^2, X^3, X^4) = \mathcal{E}_{cano}$.

$f(1) = 1$

$f(X) = X - X^3$

$f(X^2) = X^2 - 2X^4$

$$\text{Donc } \operatorname{Mat}(f ; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow X \\ \leftarrow X^2 \\ \leftarrow X^3 \\ \leftarrow X^4 \end{array}$$

2. $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\qquad P \longmapsto (P(0), P'(0), P''(0))$

On admet que f est linéaire.

La base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\mathcal{B}_{cano} = (1, X, X^2, X^3)$
et celle de $\mathbb{R}^3$ est $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ avec $\begin{cases} \vec{e_1} = (1,0,0) \\ \vec{e_2} = (0,1,0) \\ \vec{e_3} = (0,0,1) \end{cases}$

On a $f(1) = (1,0,0) = \vec{e_1}$

$f(X) = (0,1,0) = \vec{e_2}$

$f(X^2) = (0,0,2) = 2\vec{e_3}$

$f(X^3) = (0,0,0) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

Donc
$$\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano}) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} f(1) & f(X) & f(X^2) & f(X^3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \vec{e_1} \\ \leftarrow \vec{e_2} \\ \leftarrow \vec{e_3} \end{matrix} \end{array}$$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linéaire telle que $\begin{cases} f(1,2) = (0,5,8) \\ f(2,3) = (5,0,1) \end{cases}$

On pose $\vec{u_1} = (1,2)$ et $\vec{u_2} = (2,3)$.

Les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont non colinéaires et forment donc une famille libre maximale de $\mathbb{R}^2$ et donc $(\vec{u_1}, \vec{u_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Donc f est bien définie.

La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ avec $\vec{e_1} = (1,0)$ et $\vec{e_2} = (0,1)$ et la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $(\vec{\varepsilon_1}, \vec{\varepsilon_2}, \vec{\varepsilon_3})$ avec $\vec{\varepsilon_1} = (1,0,0)$, $\vec{\varepsilon_2} = (0,1,0)$ et $\vec{\varepsilon_3} = (0,0,1)$.

On cherche à calculer $f(\vec{e_1})$ et $f(\vec{e_2})$ en fonction de $\vec{\varepsilon_1}$, $\vec{\varepsilon_2}$ et $\vec{\varepsilon_3}$.

Pour cela on calcule $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ en fonction de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$:

$$\vec{e_1} = -3\vec{u_1} + 2\vec{u_2}$$
$$\vec{e_2} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2}$$

On a donc par linéarité de f :

$$f(\vec{e_1}) = -3.f(\vec{u_1}) + 2.f(\vec{u_2}) = -3.(0,5,8) + 2.(5,0,1)$$
$$= (10,-15,-22) = 10.\vec{\varepsilon_1} - 15\vec{\varepsilon_2} - 22\vec{\varepsilon_3}$$
$$f(\vec{e_2}) = 2.f(\vec{u_1}) - f(\vec{u_2}) = 2.(0,5,8) - (5,0,1)$$
$$= (-5,10,15) = -5\vec{\varepsilon_1} + 10\vec{\varepsilon_2} + 15\vec{\varepsilon_3}$$

$$\text{Donc } \mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 10 \\ -22 & 15 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \vec{\varepsilon_1} \\ \leftarrow \vec{\varepsilon_2} \\ \leftarrow \vec{\varepsilon_3} \end{array}$$

<u>Rem:</u> Si $\vec{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors $\mathrm{Mat}(\vec{v}; \mathcal{B}_{cano}) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\text{or } \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -15 & 10 \\ -22 & 15 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x - 5y \\ -15x + 10y \\ -22x + 15y \end{pmatrix} \overset{\text{th } 6}{=} \mathrm{Mat}(f(\vec{v}); \mathcal{E}_{cano})$$

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (10x - 5y, -15x + 10y, -22x + 15y)$