Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ réels deux à deux distincts.

$$V_n \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

On définit $P_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_0 & \dots & x_{n-1} & t \\ x_0^2 & \dots & x_{n-1}^2 & t^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & \dots & x_{n-1}^n & t^n \end{pmatrix}$

En développant par rapport à la dernière colonne on voit que P_n est une fonction polynomiale de degré au plus n.

Comme le déterminant est alterné on a :

$$P_n(x_0) = P_n(x_1) = \dots = P_n(x_{n-1}) = 0$$

Donc $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont des racines de P_n.

Il y en a n et $\deg(P) \leq n$ donc ce sont les racines de P_n et elles sont simples.

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tq :

$\forall t \in \mathbb{R}$, $P_n(t) = c(t - x_0)(t - x_1) \dots (t - x_{n-1})$

En développant p/r à la dernière colonne on obtient que le coefficient de t^n est :

$(-1)^{n+n} \times V_{n-1}$

Donc $c = V_{n-1}$.

Or $V_n = P_n(x_n)$.

On a donc $V_n = (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \times \cdots \times (x_n - x_0) \times V_{n-1}$

Finalement:

$$\begin{aligned} V_n = & (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \times \cdots \times (x_n - x_1)(x_n - x_0) \\ & \times (x_{n-1} - x_{n-2}) \times \cdots \times (x_{n-1} - x_1)(x_{n-1} - x_0) \\ & \vdots \\ & \times (x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ & \times (x_1 - x_0) \end{aligned}$$

ie $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$

<u>Rem:</u> Si les $x_0, \ldots, x_n$ ne sont pas 2 à 2 distincts cette formule donne $V_n = 0$ ce qui est correct puisque le déterminant est alterné.