1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. Alors :

$$\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P(0) + Q(0), \lambda P'(0) + Q'(0), \lambda P(1) + Q(1))$$
$$= \lambda.(P(0), P'(0), P(1)) + (Q(0), Q'(0), Q(1))$$
$$= \lambda.\varphi(P) + \varphi(Q)$$

Donc φ est linéaire.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On le note $P = aX^2 + bX + c$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$P \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff \begin{cases} P(0) = 0 \\ P'(0) = 0 \\ P(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases}$$

$$\iff a = b = c = 0$$

$$\iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. Donc φ est injectif.

Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ on sait que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ vers $\mathbb{R}^3$.

2. On note $\mathcal{B}_{cano} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{E}_{cano} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base

canonique de $\mathbb{R}^3$.

On a $\varphi(1) = (1,0,1) = \vec{e_1} + \vec{e_3}$

$\varphi(X) = (0,1,1) = \vec{e_2} + \vec{e_3}$

$\varphi(X^2) = (0,0,1) = \vec{e_3}$

Donc $\text{Mat}(\varphi ; \mathcal{B}_{cano}, \mathcal{E}_{cano}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} M$

M est inversible car triangulaire supérieure avec une diagonale dont tous les coefficients sont non nuls.

Calculons M^{-1}.

$$\begin{cases} x = a \\ y = b \\ x+y+z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = c-b-a \end{cases}$$

donc $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

D'après le cours $M^{-1} = \text{Mat}(\varphi^{-1} ; \mathcal{E}_{cano}, \mathcal{B}_{cano})$

On sait que $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$.

Soit $(a,b,c) = \vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Alors $\text{Mat}(\vec{v} ; \mathcal{E}_{cano}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Mat}\left(\varphi^{-1}(\vec{v}), \mathcal{B}_{cano}\right) = M^{-1} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a-b \end{pmatrix}$$

donc :

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \quad \varphi^{-1}(a,b,c) = a + bX + (c-a-b)X^2$$