① $u_n = e^{-\sqrt{n}} \geqslant 0$

D'après les croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 e^{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}} = 0$

Donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On sait que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (critère de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison de séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

② $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2} \neq 0$

La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente.

③ $u_n = \frac{n-1}{2^n - 1} \geqslant 0$ si $n \geqslant 2$.

$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}$ donc $n^2 u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^3}{2^n}$

Or d'après les croissances comparées : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 u_n = 0$.

Avec le même raisonnement qu'au ① on trouve que la série $\sum u_n$ <u>converge</u>.

④ $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{2} - 1}{2n+3} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}\ln 2} - 1}{2n+3} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln 2}{2n^2}$

On sait que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (critère de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).

En multipliant par la constante $\frac{\ln 2}{2}$ on obtient que la série $\sum \frac{\ln 2}{2n^2}$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs on en déduit que la série $\sum u_n$ <u>converge</u>.

⑤ $u_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{3^n}$

Comme au ③ on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \cdot u_n = 0$ et on conclut que $\sum u_n$ <u>converge</u>.

⑥ $u_n = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ donc la série $\sum u_n$ <u>diverge grossièrement</u>.

⑦ $\forall n \geq 1$, $n^2 \cdot |u_n| = \dfrac{n^2 \times |\cos(n!)|}{|n^3 + \cos(n!)|}$

et $0 \leq n^2 \times |\cos(n!)| \leq n^2$ pour $n \geq 1$

$0 < n^3 - 1 \leq n^3 - |\cos(n!)| \leq |n^3 + \cos(n!)|$ pour $n \geq 2$

On a donc $\forall n \geq 2$, $0 \leq n^2 \cdot |u_n| \leq \dfrac{n^2}{n^3 - 1}$

Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2}{n^3 - 1} = 0$ donc la suite $\left(\dfrac{n^2}{n^3-1}\right)_n$ est majorée et donc la suite $(n^2 \cdot |u_n|)_n$ est bornée.

On a donc $|u_n| \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Le raisonnement du 1. permet de conclure que la série $\sum |u_n|$ converge et donc que la série $\sum u_n$ converge (car la convergence absolue implique la convergence).

⑧ On a $n(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

On sait que la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (critère de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$). Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

⑨ $u_n = n e^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

D'après les croissances comparées :

$$n^2 u_n = n^3 e^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Comme $2 > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum n e^{-n}$ converge.

⑩ $u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\sqrt{n}\, u_n = \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $\frac{1}{\sqrt{n}\, u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ie $\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{=} o(u_n)$

Comme $\frac{1}{2} \leq 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

(11) $u_n = \frac{n}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$.

D'après les croissances comparées $\frac{n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Donc la série $\sum \frac{n}{\ln(n)}$ est grossièrement divergente.

(12) $u_n = \frac{\ln^3(n)}{n(n+1)}$

On a $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln^3(n)}{n^2}$

donc $n^{3/2} u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}}$

or par croissances comparées : $\frac{\ln^3(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $n^{3/2} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_n = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Comme $\frac{3}{2} > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln^3(n)}{n(n+1)}$ converge.