Exercice 13

1.(a) $\ell < 1$

$$\ell \quad \frac{1+\ell}{2} \quad 1$$

On a $\ell < \frac{1+\ell}{2} < 1$.

Comme $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1+\ell}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \frac{1+\ell}{2} = \frac{\ell-1}{2}$

Comme $\frac{\ell-1}{2} < 0$ on sait que $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1+\ell}{2} < 0$ a.p.c.r.

Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{1+\ell}{2}$

Alors $\forall n \geqslant n_0,\ a_{n+1} \leq \frac{1+\ell}{2} a_n$ puisque $a_n > 0$

Donc $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} \times a_{n_0}$ par récurrence immédiate

Si on pose $C_1 = a_{n_0} \times \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{-n_0}$ = constante p/r à n

on a $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \leqslant C_1 \times \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$

Comme $0 < \frac{1+\ell}{2} < 1$ on sait que la série géométrique $\sum \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ est convergente.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge.

1.(b) $\ell > 1$

$$1 \quad \frac{1+\ell}{2} \quad \ell$$

De même on arrive à $\forall n \geqslant n_0,\ a_n \geqslant C \cdot \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$

Comme $\frac{l+1}{2} > 1$ on a $\left(\frac{l+1}{2}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc par minoration $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

Ainsi <u>la série $\sum a_n$ diverge grossièrement</u>.

<u>1.(c)</u> avec $a_n = \frac{1}{n}$ on a $l = 1$ et la série $\sum a_n$ diverge.

Avec $a_n = \frac{1}{n^2}$ on a aussi $l = 1$ mais la série $\sum a_n$ converge.

Donc <u>si $l = 1$ on ne peut pas donner de conclusion générale</u>.

<u>2.(a)</u> Pour <u>$x = 0$</u> et $n \geq 1$: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$

donc la série $\sum \left|\frac{x^n}{n!}\right|$ converge (les sommes partielles sont stationnaires)

donc la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.

Pour <u>$x \neq 0$</u>. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} > 0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$.

Donc la série $\sum \left|\frac{x^n}{n!}\right|$ converge, donc

<u>la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.</u>

<u>Rem</u> : avec la formule de Taylor avec reste intégral on montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

2.(b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} > 0$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 4 > 1$

Donc la série $\sum \binom{2n}{n}$ diverge grossièrement.