1. $u_n = (-1)^n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

$|u_n| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (critère de Riemann avec $\alpha = 1 \leq 1$)

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série

$\sum |u_n|$ diverge.

On sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n} \underbrace{- (-1)^n \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{b_n}$

La série $\sum a_n$ converge (résultat admis).

$|b_n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc par comparaison à une série de Riemann,

la série $\sum b_n$ converge absolument et donc converge.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = a_n + b_n$

on en déduit que la série $\sum u_n$ converge. Elle est semi-convergente.

2. $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Comme au 1, la série $\sum |u_n|$ diverge.

On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} \underbrace{- (-1)^n \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}_{b_n}$

$$|b_n| \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

De même qu'au 1, la série $\sum u_n$ converge.

Elle est semi-convergente.

3. $|u_n| = \dfrac{\sqrt{n}}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0.

Donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

(la série $\sum |u_n|$ l'est aussi)

Astuce !!

4. $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \cancel{+ x^3} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3)$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+n+1} &= n \times \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n \times \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n \times \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Et donc : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Mais si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = (-1)^{n+1} \sin(x)$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

On a $\sin(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \to 0}{=} x + O(x^2)$

Donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} (-1)^{n+1} \times \left(\frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (-1)^{n+1} \times \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

et donc $\sum u_n$ converge (comme précédemment).

Par contre $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3}{8n}$ donc $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3}{8n}$

ce qui prouve que la série $\sum |u_n|$ diverge.

Donc la série $\sum u_n$ est semi-convergente.