1. On a pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$:

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

donc $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right)$

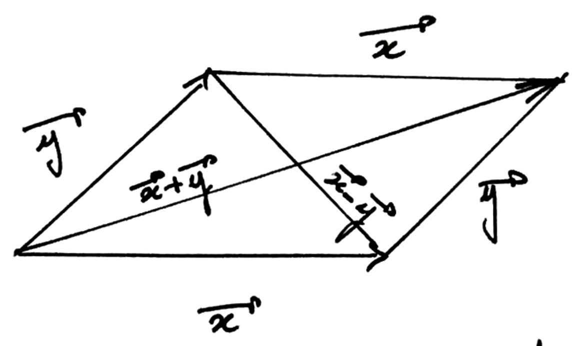
On a aussi $\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

donc $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 4.\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$

et donc $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$

2. D'après les identités remarquables précédentes :

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 = 2.\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$$



La somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des 4 côtés.