1. ϕ est une forme (évident ici).

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$.

$* \ \phi(Q,P) = \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) \times P(a_k) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times Q(a_k) = \phi(P,Q)$

donc ϕ est symétrique.

$* \ \phi(\lambda P + Q, R) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(a_k) + Q(a_k)) \times R(a_k)$

$= \lambda \times \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times R(a_k) + \sum_{k=0}^{n} Q(a_k) \times R(a_k)$

$= \lambda \times \phi(P,R) + \phi(Q,R)$.

donc ϕ est linéaire à gauche.

Comme elle est symétrique, elle est donc bilinéaire.

$* \ \phi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geqslant 0$ car somme de termes positifs.

donc ϕ est une forme positive.

$* \ \phi(P,P) = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 = 0$

$\iff \forall k \in [\![0, n]\!], \ P(a_k)^2 = 0$ car somme nulle de termes positifs

$\iff \forall k \in [\![0, n]\!], \ P(a_k) = 0$

$\iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car le seul polynôme de degré $\leq n$ qui a au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

2. On note $(L_0, \dots, L_n)$ les polynômes de Lagrange définies aux TD 13, 15 et 19, associés aux réels $a_0, \dots, a_n$.

Ils vérifient :

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, \quad L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Alors on a :

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \langle L_i, L_i \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2 = \overbrace{0^2 + \dots + 0^2}^{k \text{ va de } 0 \text{ à } i} + \overbrace{1^2}^{k=i} + \overbrace{0^2 + \dots + 0^2}^{k \text{ va de } i+1 \text{ à } n}$$

$$= 1$$

De plus si $(i,j) \in [\![0,n]\!]$ tq $i \neq j$, on a par exemple si $i < j$:

$$\langle L_i, L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) \times L_j(a_k)$$

$$= 0\times 0 + \dots + 0\times 0 + \underbrace{1\times 0}_{k=i} + 0\times 0 + \dots + 0\times 0 + \underbrace{0\times 1}_{k=j} + 0\times 0 + \dots + 0\times 0$$

$$= 0$$

Donc $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, \quad \langle L_i, L_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Donc la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une <u>base orthonormée</u> de $\mathbb{R}_n[X]$.
(car elle est formée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs)

3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

D'après le cours on a : $P = \sum_{k=0}^{n} \langle P, L_k \rangle . L_k(X)$

or $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\langle P, L_k \rangle = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) \times L_k(a_i)$

$$= \underbrace{0 + \cdots + 0}_{i \text{ va de } 0 \text{ à } k-1} + \underbrace{P(a_k) \times 1}_{i=k} + \underbrace{0 + \cdots + 0}_{i \text{ va de } k+1 \text{ à } n}$$

$= P(a_k)$.

Donc $P = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times L_k(X)$

Les coordonnées de P dans la base $(L_0, \ldots, L_n)$ sont donc :

$\big(P(a_0), \ldots, P(a_n)\big)$.