Si $(f,g) \in E^2$ alors les fonctions f, f', g, g' sont continues sur $[0,1]$ donc la fonction $(f+f')\times(g+g')$ l'est aussi et donc l'intégrale $\int_0^1 (f(t)+f'(t))\times(g(t)+g'(t))dt$ est bien définie.

Donc $(.|.)$ est une <u>forme</u>.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g,h) \in E^3$.

* $(g|f) = g(0)\times f(0) + \int_0^1 (g(t)+g'(t))\times(f(t)+f'(t))dt$

$= f(0)\times g(0) + \int_0^1 (f(t)+f'(t))\times(g(t)+g'(t))dt = (f|g)$

donc $(.|.)$ est une forme <u>symétrique</u>.

* $(\lambda f+g|h) = (\lambda f(0)+g(0))\times h(0) + \int_0^1 (\lambda f(t)+g(t)+\lambda f'(t)+g'(t))(h(t)+h'(t))dt$

$= \lambda\left(f(0)\times h(0) + \int_0^1 (f(t)+f'(t))(h(t)+h'(t))dt\right)$

$+ \left(g(0)\times h(0) + \int_0^1 (g(t)+g'(t))(h(t)+h'(t))dt\right)$

$= \lambda.(f|h) + (g|h)$

donc $(.|.)$ est linéaire à gauche.

Comme elle est symétrique, elle est donc <u>bilinéaire</u>.

* $(f|f) = f(0)^2 + \int_0^1 (f(t)+f'(t))^2 dt \geq 0$

donc $(.|.)$ est une forme <u>positive</u>.

* $(f|f) = 0 \iff f(0)^2 + \int_0^1 (f(t)+f'(t))^2 dt = 0$

somme de 2 réels ≥ 0 $\iff f(0)^2 = 0 = \int_0^1 (f(t)+f'(t))^2 dt$

car $(f+f')^2$ est continue ≥ 0 $\iff f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1], (f(t)+f'(t))^2 = 0$

$\iff f(0) = 0$ et $\forall t \in [0,1], f(t)+f'(t) = 0$

EDL d'ordre 1 $\iff f(0) = 0$ et $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], f'(t) = Ce^{-t}$

$\iff \forall t \in [0,1], f(t) = 0$

$\iff f = 0$

Donc $(.|.)$ est une forme <u>définie</u>

Donc $(.|.)$ est <u>un produit scalaire</u> sur $C^1([0,1]; \mathbb{R})$.