Exercice 10

1. $\sqrt{x^2-1}$ est définie $\iff x^2-1 \geq 0 \iff |x| \geq 1$

Si $x \geq 1$: $x + \sqrt{x^2-1} \geq 1+0 > 0$

donc $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ est définie

Si $x \leq -1$: $\sqrt{x^2-1}+x > 0 \iff \sqrt{x^2-1} > -x$

$\iff x^2-1 > x^2$ car les 2 membres sont ≥ 0

$\iff -1 > 0$. Impossible

donc ici $\sqrt{x^2-1}+x \leq 0$

Conclusion : $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ définie ssi $x \geq 1$.

Donc : $\boxed{ch\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) \text{ définie ssi } x \geq 1}$

Pour $x \geq 1$:

$$ch\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1} + \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-(x^2-1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x = \boxed{x}$$

c'est cohérent avec l'exercice 9 puisqu'on a calculé :

$$ch\left(\left(ch_{|\mathbb{R}^+}\right)^{-1}(x)\right) = x$$

2) De même : $\boxed{\mathrm{sh}(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) \text{ est définie ssi } x \geqslant 1}$

Pour $x \geqslant 1$:

$$\mathrm{sh}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right) = \boxed{\sqrt{x^2-1}}$$

3) $\sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$

et $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$

donc $\forall x \in \mathbb{R},\ x+\sqrt{x^2+1} > 0$

Donc $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{\mathrm{ch}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{ch}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1} + \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-(x^2+1)}\right)$$

$$= \boxed{\sqrt{x^2+1}}$$

4) De même : $\boxed{\mathrm{sh}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

Pour $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{sh}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1}\right) = \boxed{x}$

C'est cohérent avec l'exercice 9 puisqu'on calcule $\mathrm{sh}\left(\mathrm{sh}^{-1}(x)\right) = x$

Exercice 19

1) $e^{2x+1} = e^{6/x}$ est définie si $x \neq 0$.

$$e^{2x+1} = e^{6/x} \iff 2x+1 = \frac{6}{x} \iff 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\iff x = -2 \text{ ou } \frac{3}{2}$$

Donc $\boxed{S = \left\{-2 ; \frac{3}{2}\right\}}$

2) $e^{2x-1} = e^{-x^2+3} \iff 2x - 1 = -x^2 + 3 \iff x^2 + 2x - 4 = 0$

$$\iff x = 1 \pm \sqrt{5}$$

Donc $\boxed{S = \{1 - \sqrt{5} ; 1 + \sqrt{5}\}}$

3) $e^{2x} - 2e^{x} - 3 = 0 \iff t^2 - 2t - 3 = 0$ en posant $t = e^x$

$$\iff t = -1 \text{ ou } 3$$

$$\iff e^x = -1 \text{ ou } e^x = 3$$

$$\iff x = \ln 3$$

Donc $\boxed{S = \{\ln 3\}}$

4) $|x^2 + 2x - 3| < 6 \iff x^2 + 2x - 3 < 6$ <u>et</u> $x^2 + 2x - 3 > -6$

$$\iff x^2 + 2x - 9 < 0 \text{ \underline{et} } x^2 + 2x + 3 > 0$$

$$\iff x \in [-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}] \text{ \underline{et} } x \in \mathbb{R}$$

Donc $\boxed{S = [-1 - \sqrt{10}, -1 + \sqrt{10}]}$

⑤ $x=0$ n'est pas solution donc on peut supposer $x \neq 0$.
Alors $|x|>0$ donc :

$$|x^2+2x|<3|x| \iff \frac{|x^2+2x|}{|x|}<3 \iff |x+2|<3$$

$$\iff x+2<3 \text{ et } -3<x+2$$

$$\iff x<1 \text{ et } -5<x$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=]-5,0[\cup]0,1[}$

⑥ $\ln(2x)=\ln(x^2-1)$ est définie ssi $2x>0$ et $x^2-1>0$
ssi $x>1$

Pour $x>1$:

$$\ln(2x)=\ln(x^2-1) \iff 2x=x^2-1$$

$$\iff x^2-2x-1=0$$

$$\iff x=1-\sqrt{2} \text{ ou } x=1+\sqrt{2}$$

$$\iff x=1+\sqrt{2} \quad \text{car } x>1$$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=1+\sqrt{2}}$

⑦ $\ln(2x)\geqslant\ln(x^2-1)$ est définie ssi $x>1$.

Pour $x>1$:

$$\ln(2x)\geqslant\ln(x^2-1) \iff 2x\geqslant x^2-1 \quad \text{car } \ln \text{ strict}^t \nearrow$$

$$\iff x^2-2x-1\leqslant 0$$

$$\iff x\leqslant 1-\sqrt{2} \text{ ou } x\geqslant 1+\sqrt{2}$$

$$\iff x\geqslant 1+\sqrt{2} \quad \text{car } x>1$$

donc $\boxed{\mathcal{S}=[1+\sqrt{2},+\infty[}$

8) $\sqrt{x+1} < 5-x$ est définie ssi $x \geqslant -1$.

Cas 1 $-1 \leqslant x \leqslant 5$. Alors $5-x \geqslant 0$.

Donc : $\sqrt{x+1} \leqslant 5-x \iff x+1 \leqslant (5-x)^2$ car les 2 membres sont $\geqslant 0$

$$\iff x^2-11x+24 \geqslant 0$$

$$\iff x \leqslant 3 \text{ ou } x \geqslant 8$$

$$\iff -1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{car } x \in [-1,5]$$

Cas 2 $x > 5$. Alors $5-x < 0$ et $\sqrt{x+1} \geqslant 0$

Donc $\sqrt{x+1} < 5-x$ est impossible.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = [-1, 3]}$

9) $x+\sqrt{x^2+1} > 0$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2+1 \geqslant 0$

De plus $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant -x$

donc $x+\sqrt{x^2+1} > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \mathbb{R}}$

10) $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0 \iff 2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x$

$$\iff 2^{3x-1} = 5^x(5-1)$$

$$\iff 2^{3x-1} = 4 \times 5^x$$

$$\iff 2^{3x-3} = 5^x$$

$$\iff (3x-3).\ln 2 = x.\ln 5$$

$$\iff x.(3\ln 2 - \ln 5) = 3.\ln 2$$

$$\iff x = \frac{\ln 8}{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{\ln 8}{\ln\left(\frac{5}{8}\right)} \right\}}$

(11) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}=3$ est définie ssi $x \geqslant -2$.

La fonction $x \xmapsto{f} \sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+6}-3$ est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$ et continue.

$f(-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $[-2,+\infty[$ vers $[0,+\infty[$.

Donc $\exists!\, x \geqslant -2,\ f(x)=0$. Et on a vu que $f(-2)=0$

Donc $\boxed{\mathcal{S}=\{-2\}}$

(12) De même $x \xmapsto{f} \sqrt{x+1}+\sqrt{x+10}+\sqrt{x+100}-12$ est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

Or $f(-1)=3+\sqrt{99}-12 > 3+\sqrt{81}-12=0$

Donc $\forall x \geqslant -1,\ f(x)>0$. Donc $\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$

(13) $2\ln(x+1)+\ln(3x+5)+\ln 2=\ln(6x+1)+\ln(x-2)+\ln(x+2)$ (E)

est définie ssi $x>2$.

Pour $x>2$:

(E) $\iff \ln\left((x+1)^2(3x+5)2\right)=\ln\left((6x+1)(x-2)(x+2)\right)$

$\iff 2(x+1)^2(3x+5)=(6x+1)(x^2-4)$

$\iff 6x^3+22x^2+26x+10=6x^3+x^2-24x-4$

$\iff 21x^2+50x+14=0$ Impossible si $x>0$ donc si $x>2$.

$\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$

14) $e^x + e^{1-x} = e + 1$

$\iff t + \frac{e}{t} = e + 1$ avec $t = e^x > 0$

$\iff t^2 - (e+1)t + e = 0$

$\iff t = 1$ ou e

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1, e\}}$

15) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ est définie ssi $x > 0$.

Pour $x > 0$:

$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff \sqrt{x} . \ln x = x . \ln \sqrt{x}$

$\iff \sqrt{x} . \ln x = \frac{x}{2} . \ln x$

$\iff \ln x = 0$ ou $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$

$\iff x = 1$ ou $\sqrt{x} = 2$

$\iff x = 1$ ou $x = 4$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{1, 4\}}$

16) $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

$\iff 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}}$

$\iff (2+1) . 2^{2x-1} = (3+1) . 3^{x-\frac{1}{2}}$

$\iff 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \iff (2x-3) \ln 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right) . \ln 3$

$\iff (2 . \ln 2 - \ln 3) . x = 3 . \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$

$\iff x = \frac{3}{2} \frac{\ln 4/3}{\ln 4/3} \iff x = \frac{3}{2}$ Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$