Principe de comparaison logarithmique

(1) On suppose que $\exists k \in [0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N},$

$$\forall n \geq n_0, |u_{n+1}| \leq k.|u_n|$$

Mq $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

On a :

$$|u_{n_0+1}| \leq k.|u_{n_0}|$$

$$|u_{n_0+2}| \leq k.|u_{n_0+1}| \leq k^2.|u_{n_0}|$$

$$|u_{n_0+3}| \leq k.|u_{n_0+2}| \leq k^3.|u_{n_0}|$$

Par récurrence immédiate : $\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq k^{n-n_0}.|u_{n_0}|$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} k^{n-n_0}.|u_{n_0}| = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n_0}|}{k^{n_0}} \times k^n = 0$

car $0 \leq k < 1$ et $\dfrac{|u_{n_0}|}{k^{n_0}}$ ne dépend pas de n

Donc par le théorème de convergence par encadrement :

$$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$$

② On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ avec $0 \leq l < 1$.

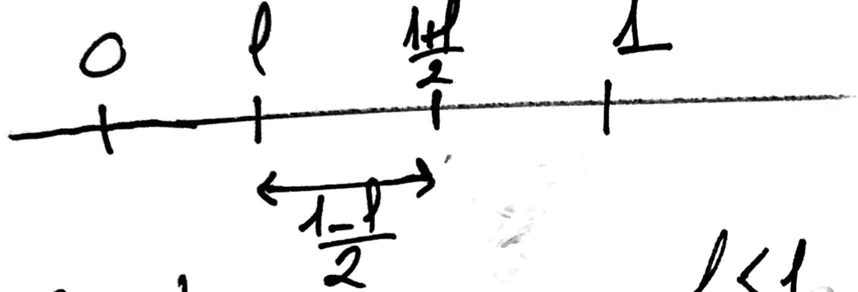
Mq $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Par hypothèse :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} ;\ \forall n \geq n_0(\varepsilon),\ \left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| \leq \varepsilon$

donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq l + \varepsilon$

On choisit $\varepsilon > 0$ tq $l + \varepsilon < 1$: $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$



On a bien $\varepsilon > 0$ car $l < 1$.

$\exists n_\varepsilon(\varepsilon) \in \mathbb{N} ;\ \forall n \geq n(\varepsilon),\ \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq l + \frac{1-l}{2} = \frac{1+l}{2}$

donc $\forall n \geq n_\varepsilon(\varepsilon),\ |u_{n+1}| \leq \frac{1+l}{2} |u_n|$

Or $l < 1$ donne $\frac{1+l}{2} < 1$.

On peut donc utiliser la question 1. : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$