TD6 Ex 14

1. Par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2. On a $v_0 - u_0 = b - a < 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_n - u_n < 0$.

Alors $$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4u_n v_n - (u_n+v_n)^2}{2(u_n+v_n)} = \frac{2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2}{2(u_n+v_n)}$$
$$= -\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n+v_n)} < 0 \text{ car } v_n - u_n < 0$$

Donc par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n < 0}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n - u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = \frac{u_n v_n - v_n^2}{u_n + v_n} = v_n \cdot \frac{u_n - v_n}{u_n + v_n} > 0$$

Donc $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} < 0$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$.

4.(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après 2. on a $\boxed{u_{n+1} - v_{n+1} > 0}$

De plus $u_{n+1} - v_{n+1} - \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)} - \frac{1}{2}(u_n - v_n)$

$$= \frac{u_n - v_n}{2(u_n+v_n)} \times \left[u_n - v_n - (u_n + v_n) \right]$$

$$= \frac{(v_n - u_n)v_n}{u_n + v_n} < 0$$

donc $\boxed{u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)}$

4.(b) On a donc $0 < u_1 - v_1 < \frac{1}{2}(u_0 - v_0)$

$0 < u_2 - v_2 < \frac{1}{2}(u_1 - v_1) < \frac{1}{2^2}(u_0 - v_0)$

$0 < u_3 - v_3 < \frac{1}{2}(u_2 - v_2) < \frac{1}{2^3}(u_0 - v_0)$

$\vdots$

Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n}(u_0 - v_0)$$

Puis par encadrement $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Avec 3. on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$

5. D'après le théorème des suites adjacentes on sait que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $\ell \geqslant 0$. ③

On a $u_0 \geqslant \ell \geqslant v_0$ donc $a \geqslant \ell \geqslant b > 0$.

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \cdot v_{n+1} = u_n \cdot v_n$

Donc la suite $(u_n \times v_n)_n$ est stationnaire.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \times v_n = u_0 \times v_0 = ab$

Or par produit de limites : $u_n \times v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell^2$

Par unicité de la limite : $\ell^2 = ab$

Comme $\ell \geqslant 0$: $\boxed{\ell = \sqrt{ab}}$