

TD6 Ex 15

(1)

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_{n+1} - u_n = \left( \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} \right) - n - 1 - \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \right) + n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$$

$$= \frac{1 - 2^{n+1}}{2}$$

or  $n \geq 0$  donc  $2^{n+1} \geq 2$  donc  $1 - 2^{n+1} \leq 0$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$

Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

2. On a  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ :

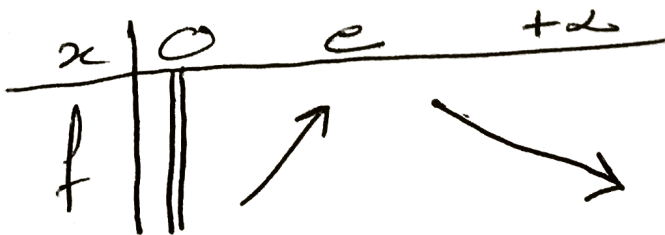
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n!} = \frac{n+1}{2} \geq 1 \text{ dès que } n \geq 1$$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} \geq u_n$ .

Ainsi  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 1.

3. On considère la fonction  $f$  d'expression  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .  
 $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme quotient de fonctions dérivables.

$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  du signe de  $1 - \ln x$



Donc  $f$  est décroissante sur  $[e, +\infty[$ .

Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 3$  on a  $n \geq e$  et  $n+1 > e$

donc  $n \leq n+1$  donne  $f(n) \geq f(n+1)$

$$\text{Ainsi } \forall n \geq 3, u_n = \frac{\ln n}{n} \geq u_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Donc  $(u_n)$  est décroissante à partir du rang 3

4. Pour  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \leq 0 \end{aligned}$$

Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante