TD6 Ex15

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k}\right) - n - 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right) + n = \frac{1}{2^{n+1}} - 1$$

$$= \frac{1 - 2^{n+1}}{1}$$

or $n \geq 0$ donc $2^{n+1} \geq 2$ donc $1 - 2^{n+1} \leq 0$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$

Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

2. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+2}} \times \frac{2^{n+1}}{n!} = \frac{n+1}{2} \geq 1 \text{ dès que } n \geq 1$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Ainsi $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } 1.}$

3. On considère la fonction f d'expression $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables.

$\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ du signe de $1 - \ln x$

x	0		e		$+\infty$
f	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

Donc f est décroissante sur $[e,+\infty[$.

Si $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 3$ on a $n\geqslant e$ et $n+1\geqslant e$

donc $n\leqslant n+1$ donne $f(n)\geqslant f(n+1)$

Ainsi $\forall n\geqslant 3$, $u_n=\frac{\ln n}{n}\geqslant u_{n+1}=\frac{\ln(n+1)}{n+1}$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante à partir du rang } 3}$

4. Pour $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}-u_n=\sum_{k=0}^{2n+2}\frac{(-1)^k}{k}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$$

$$=\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+1}.$$

$$=-\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\leqslant 0$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$