TD6 Exo 17

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$:

on a $1 \leq k \leq n$ donc $0 < n^3+1 \leq n^3+k^2 \leq n^3+n^2$

$$\text{donc } \frac{1}{n^3+n^2} \leq \frac{1}{n^3+k^2} \leq \frac{1}{n^3+1}$$

$$\text{donc } \frac{n^2}{n^3+n^2} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{n^2}{n^3+k^2} \leq \frac{n^2}{n^3+1}$$

On additionne ces inégalités pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+1}$$

ie $\dfrac{n}{n+1} \leq S_n \leq \dfrac{n^3}{n^3+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Or $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

et $\dfrac{n^3}{n^3+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

D'après le théorème de convergence par encadrement on a $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$

2.(a) On étudie les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ d'expressions $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} < 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} > 0$$

or $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

donc $\forall x > 0, \ f(x) \leq 0$ et $g(x) \geq 0$

Donc $\boxed{\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$.

2.(b) Si $k \in [\![1, n]\!]$ alors $\frac{k}{n^2} > 0$

donc $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

On additionne ces inégalités pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

ie $$\frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4} \leq \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)\right) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

Or $$\frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{12n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

D'après le théorème de convergence par encadrement : ③

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Mais on a $e^x \xrightarrow[x\to\frac{1}{2}]{} e^{1/2} = \sqrt{e}$

Par composée : $\boxed{u_n = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}}$

<u>3.</u> Pour $n \geq 2$:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < \left\lfloor\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

et $\underset{\text{car } n\geq 2}{0} < \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < \left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor \leq \left(n-\frac{1}{2}\right)^2$

donc $\dfrac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \leq \dfrac{1}{\left\lfloor\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\rfloor} < \dfrac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}$

Par produit d'inégalités où tous les membres sont ≥ 0 :

$$\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} < u_n < \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}$$

Et on montre facilement avec le théorème de convergence par encadrement que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$