Correction du DM2

EXERCICE

1. Par Chasles $P_{k+1} = (1-a_{k+1}) \cdot P_k$.

2. Pour $k=1$: $P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1} = P_1 + a_1 P_0$
$= P_1 + a_1 = 1 - a_1 + a_1$
$= 1$

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$ fixé on a :
$$P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1} = 1$$
Alors $P_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot P_{i-1} \overset{\text{chasles}}{=} P_{k+1} + a_{k+1} \cdot P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1}$
$$= (1-a_{k+1}) P_k + a_{k+1} \cdot P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1}$$
$$= P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot P_{i-1} = 1$$
D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3.(a) $P_n = \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = 0$ car pour $j=n$ on a $1 - \frac{j}{n} = 0$

3.(b) $P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^k} \prod_{j=1}^{k} (n-j)$

$$P_k = \frac{1}{n^k}(n-1)(n-2)\times\cdots\times(n-k) = \frac{1}{n^k}\,\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\times\frac{k!}{k!}$$

$$\boxed{= \frac{k!}{n^k}\cdot\binom{n-1}{k}}$$

3.(c) Pour $k=0$: $\frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{1}\times 1 = 1 = P_0$ ok.

4. D'après la question 2. appliquée au rang n on a :

$$P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k\, P_{k-1} = 1 \quad \text{avec } a_k = 1-\frac{k}{n}$$

donc $$0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\times\frac{(k-1)!}{n^{k-1}}\binom{n-1}{k-1} = 1$$

i.e. $$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k!}{n^k} = 1}$$

PROBLEME

Partie I

1. On a $u_0 > 1$ donc $u_0 \geq 1$.

Supposons que $u_n \geq 1$ pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

alors $u_n^2 \geq 1^2 = 1$ donc $u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2} \geq \frac{1+1}{2} = 1$

D'après le principe de récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n}{2} - u_n = \frac{\overset{\geq 0}{u_n}\,\overbrace{(u_n - 1)}^{\geq 0}}{2} \geq 0 \text{ pour tout } n \geq 0$$

Donc $\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

3.(a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$ car $(u_n) \nearrow$

donc par prolongement des inégalités : $l \geq u_0$

Or $u_0 > 1$ donc $\boxed{l > 1}$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ donc par

opérations sur les limites et par unicité de la limite

④

La relation $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$ donne $\boxed{l = \frac{l^2+l}{2}}$

On a donc $l^2 = l$ ie $l = 0$ ou $l = 1$.

Ces deux valeurs sont impossibles car $l > 1$.

On a donc une contradiction.

3. b) (u_n) n'est donc pas convergente. Comme elle est croissante, le théorème de la limite monotone permet de conclure que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

Partie II

1. a) $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{2}\right) - \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$

$= \frac{1}{2^{n+1}} \left[\ln\left(\frac{u_{n+1}}{2}\right) - 2 \ln\left(\frac{u_n}{2}\right) \right] = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{2u_{n+1}}{u_n^2}\right)$

$= \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(\frac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$

or $1 + \frac{1}{u_n} > 1$ car $u_n \geq 0$ donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \geq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Ainsi $\boxed{(v_n) \text{ est croissante}}$

1.(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} \le u_n^2 \iff \frac{u_n^2 + u_n}{2} \le u_n^2$$

$$\iff \frac{u_n^2 - u_n}{2} \le 0$$

$$\iff u_n (u_n - 1) \le 0$$

or $u_n \ge 1$ donc $\underbrace{u_n}_{\ge 0} (\underbrace{u_n - 1}_{\le 0}) \le 0$

En remontant les $\iff$: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \le u_n^2}$

1.(c) Pour $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right)$$

mais $u_n \ge 1$ donc $\frac{1}{u_n} \le 1$

donc $\ln\left(1 + \frac{1}{u_n}\right) \le 2$ car $\ln \nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Ainsi : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \le \frac{1}{2^{n+1}} \ln 2}$

1 (d) Soit $n \geq 1$.

Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$v_{k+1} - v_k \leq \frac{1}{2^{k+1}} \ln 2$$

donc $$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)}_{= v_n - v_0} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \ln 2}_{= \ln 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}$$ par Σ d'inégalités

Ainsi : $$\boxed{v_n \leq v_0 + \ln 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \quad \text{pour } n \geq 1}$$

1.(e) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 2 - \frac{1}{2^n} - 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$$

Donc $\forall n \geq 1$, $v_n \leq \underbrace{v_0 + \ln 2}_{\text{ne dépend pas de } n}$

Ceci prouve que (v_n) est croissante majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$

<u>2(a)</u> On étudie la fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Elle est dérivable et :

$$\forall x>0,\ f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$$

donc f strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	

On a donc

$$\forall x>0,\ f(x) \leq 0$$

donc $\boxed{\forall x>0,\ \ln(1+x) \leq x}$

<u>2.(b)</u> Les questions 1.(a), 1.(c) et 2.(a) donnent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1} \cdot u_n}}$$

<u>2.(c)</u> On a pour tout $k \in [\![1, p]\!]$:

$$0 \leq v_{n+k} - v_{n+k-1} \leq \frac{1}{2^{n+k} \cdot u_{n+k-1}}$$

Mais $(u_n) \nearrow$ donc $u_{n+k-1} \geq u_n > 0$

donc $$0 \leq v_{n+k} - v_{n+k-1} \leq \frac{1}{2^{n+k} \cdot u_n}$$

Par somme d'inégalités :

$$0 \leq \sum_{k=1}^{p} (V_{n+k} - V_{n+k-1}) \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k} \cdot u_n}$$

donc $$\boxed{0 \leq V_{n+p} - V_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}}}$$

<u>2.(d)</u> $$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p} \right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \frac{1}{2^n}$$

Par prolongement de l'inégalité du 2.(c) lorsque $p \to +\infty$ on a :

$$\boxed{0 \leq \alpha - V_n \leq \frac{1}{2^n \cdot u_n}}$$

2.(e) $v_n = \frac{1}{2^n} \ln \frac{u_n}{2}$

donc $\frac{u_n}{2} = e^{2^n \cdot v_n}$ i.e. $\boxed{u_n = 2e^{2^n \cdot v_n}}$

2.(f) ⚠ On ne peut pas faire le raisonnement suivant.

$\lim v_n = \alpha$ donc $\lim \frac{u_n}{2e^{2^n v_n}} = \cancel{\lim \frac{u_n}{2e^{2^n \alpha}}}$

contre-ex : $u_n = v_n = \frac{1}{n}$ de $\alpha = \lim \frac{1}{n} = 0$

on aurait $\lim \frac{v_n}{u_n} = \lim \frac{\alpha}{u_n} = \lim 0 = 0$

absurde car $\lim \frac{v_n}{u_n} = 1$ puisque $u_n = v_n$

On procède donc par encadrement :

On a : $\forall n, \ 0 \leq \alpha - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$

donc $\forall n, \ 0 \leq 2^n \cdot (\alpha - v_n) \leq \frac{1}{u_n}$

comme $\lim u_n = +\infty$, on a $\lim \frac{1}{u_n} = 0$

et donc par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n \cdot (\alpha - v_n) = 0$

Or $\frac{u_n}{2e^{\alpha 2^n}} = \frac{2e^{v_n 2^n}}{2e^{\alpha 2^n}} = e^{2^n(v_n - \alpha)}$

or $\lim 2^n.(v_n - \alpha) = - \lim 2^n(\alpha - v_n) = -0 = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{2^n.(v_n - \alpha)} = \lim\limits_{X \to 0} e^X = e^0 = 1$

Ainsi : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{2e^{\alpha 2^n}} = 1}$