Correction du DM3

Exercice 1

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}\left(e^{i(2k+1)x}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x}\right)$

or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)x} = e^{ix}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{i2x}\right)^k$ $\quad e^{i2x} \neq 1$ car $0 < x < 2\pi$

$$= e^{ix}\frac{1-\left(e^{i2x}\right)^n}{1-e^{i2x}} = e^{ix}\frac{e^{inx}\left(e^{-inx}-e^{inx}\right)}{e^{ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)}$$

$$= e^{inx}\frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)x\right) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}}$

2. $\sin x + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$

$\displaystyle\iff \sum_{k=0}^{3} \sin\left((2k+1)x\right) = \sin(4x)$

$\displaystyle\iff \frac{\sin^2(4x)}{\sin(x)} = \sin(4x) \iff \sin(4x) = 0$ ou $\sin(x) = \sin(4x)$

$\iff \begin{cases} 4x = 0 \ [\pi] \\ \text{ou} \\ x = 4x \ [\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \ \left[\frac{\pi}{4}\right] \\ \text{ou} \\ x = 0 \ \left[\frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$

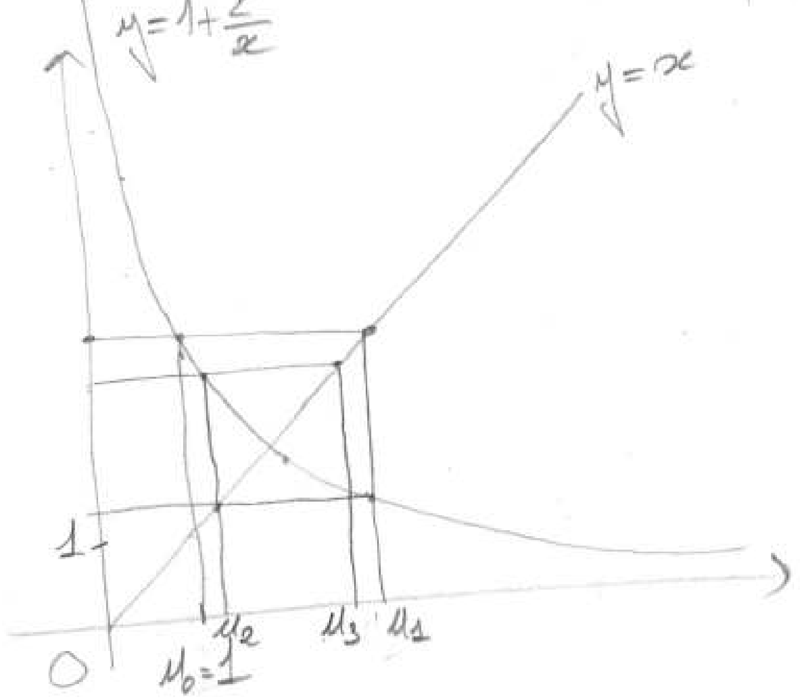
Comme $x \in]0,\pi[$, les solutions sont : $\boxed{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}}$

Exercice 2

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$\forall x>0,\ f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} < 0$

x	0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0



Il semblerait que (u_n) converge vers ℓ tq $\ell = f(\ell)$

ie $\ell = 1 + \dfrac{2}{\ell}$

donc $\ell = 2$

2. Pour $n=0$: u_0 existe et $u_0 = 1$

On suppose pour $n \in \mathbb{N}$ fixé que u_n existe et $u_n > 0$.

Alors $u_n \neq 0$ donc $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$ existe

et $u_n > 0$ donc $u_{n+1} > 1$ donc $u_{n+1} > 0$

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est bien définie et strictement positive}}$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = 1 + \frac{2}{u_{2n+1}} = 1 + \frac{2}{f(u_{2n})}$$

$$= 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{u_{2n}}} = \frac{3u_{2n}+2}{u_{2n}+2} = \frac{2+3v_n}{2+v_n}$$

de même $w_{n+1} = \dfrac{2+3w_n}{2+w_n}$

Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = g(v_n) \text{ et } w_{n+1} = g(w_n) \text{ où } g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2+3x}{2+x}}$

3. (b) Si $n = 0$: $v_0 = u_0 = 1$ donc $0 < v_0 < 2$

Supposons que $0 < v_n < 2$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Or a $0 < v_{n+1} < 2 \iff 0 < \dfrac{2+3v_n}{2+v_n} < 2$

$$\underset{2+v_n>0}{\iff} 0 < 2+3v_n < 2\times(2+v_n)$$

$$\iff -\frac{2}{3} < v_n \text{ et } 2+3v_n < 4+2v_n$$

$$\iff -\frac{2}{3} < v_n \text{ et } v_n < 2$$

Ceci est vrai car $0 < v_n < 2$.

En remontant les $\Longleftrightarrow$ on a donc $0 < V_{n+1} < 2$.

D'après le principe de récurrence on a donc montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < V_n < 2}$$

De même $W_0 = u_1 = 3 > 2$

De plus, si on suppose $W_n > 2$ à un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé :

$$W_{n+1} > 2 \Longleftrightarrow \frac{2+3W_n}{2+W_n} > 2 \underset{2+W_n>0}{\Longleftrightarrow} 2+3W_n > 2(2+W_n)$$

$$\Longleftrightarrow W_n > 2 \quad \text{ce qui est vrai !}$$

D'après le principe de récurrence, on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, W_n > 2}$$

<u>3.(c)</u> On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2+3V_n}{2+V_n} - V_n = \frac{2+3V_n - 2V_n - V_n^2}{2+V_n} = \frac{2+V_n - V_n^2}{2+V_n}$$

$$= \frac{(V_n+1)(2-V_n)}{2+V_n} > 0 \quad \text{car } 0 < V_n < 2$$

Donc (V_n) est croissante majorée par 2.

D'après le théorème de la limite monotone,

$$\boxed{(V_n) \text{ converge vers un réel } l \leq 2}$$

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_{n+1} - W_n = \frac{(1+W_n)(2-W_n)}{2+W_n} < 0 \quad \text{car } W_n > 2$$

Donc (W_n) décroissante minorée par 2.

$\boxed{\text{Donc } (W_n) \text{ converge vers un réel } L \geqslant 2.}$

3.(d) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_{n+1} = \frac{2+3V_n}{2+V_n}$

Lorsque $n \to +\infty$ on a donc : $l = \frac{2+3l}{2+l}$ (car $l \neq -2$)

$\iff l^2 - l - 2 = 0 \iff l = -1$ ou $2 \iff \boxed{l = 2}$ ($l \geqslant 0$)

De même on montre $\boxed{L = 2}$ (on a aussi $L \geqslant 0$)

4. On vient de montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite 2.

Comme ce sont des suites extraites recouvrantes de (u_n) on sait donc par théorème que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 2.}$

EXERCICE 3

1. $P(0)$ vraie d'après l'énoncé.

Supposons $P(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a $u_n > 0$ et $v_n > 0$ donc $u_n + v_n > 0$.

En particulier : $u_n + v_n \neq 0$.

Ceci prouve que u_{n+1} et v_{n+1} existent.

D'autre part $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{u_n + v_n} > 0$

puisque $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont bien définies et } > 0}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} - u_n = \frac{-u_n v_n}{u_n + v_n} < 0 \text{ car } u_n > 0, v_n > 0$$

Donc (u_n) décroissante minorée par 0.

Donc $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geq 0}$

d'après le théorème de la limite monotone.

De même : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-u_n v_n}{u_n + v_n} < 0$

donc (v_n) décroissante minorée par 0

donc $\boxed{(v_n) \text{ converge vers un réel } L \geq 0}$

3.(a) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{u_n + v_n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \cdot (u_n + v_n) = u_n^2$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$: $\boxed{\ell(\ell + L) = \ell^2}$

De même $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1}(u_n + v_n) = v_n^2$

donc $\boxed{L(\ell + L) = L^2}$

3.(b) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - v_n^2}{u_n + v_n} = \boxed{u_n - v_n}$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = u_0 - v_0 < 0$

Lorsque $n \longrightarrow +\infty$: $\ell - L = u_0 - v_0 < 0$

Donc $\underline{l < L}$.

Mais les relations de la question 3 (a) donnent
$lL = 0$ i.e. $\underline{l = 0 \text{ ou } L = 0}$

De plus $\underline{l \geq 0 \text{ et } L \geq 0}$.

On en conclut que $\boxed{l = 0 \text{ et } L = v_0 - u_0}$

4 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \boxed{\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)^2}$

Donc par une récurrence immédiate.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{u_0}{v_0}\right)^{2^n} = a^{2^n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^{2^n} \cdot v_n$
$$\text{et} \quad u_n - v_n = u_0 - v_0 = u_0\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$
$$= u_0 \cdot \frac{a-1}{a}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \cdot (a^{2^n} - 1) = u_0 \dfrac{a-1}{a}$

donc $\boxed{v_n = u_0 \dfrac{a-1}{a(a^{2^n} - 1)}}$ et $\boxed{u_n = u_0 \dfrac{(a-1)a^{2^n}}{a(a^{2^n} - 1)}}$

EXERCICE 4

1 (a) Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{\alpha} = +\infty$

et si $\beta < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln n)^{\beta} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}} = \dfrac{0}{+\infty} = \boxed{0}$

1. (b) Si $\beta = 0$, $(\ln n)^{\beta} = 1$ pour tout n

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^{\beta}}{n^{\alpha}} = \dfrac{1}{+\infty} = \boxed{0}$

1 (c) Si $n \geq 2$, $u_n > 0$

et $\ln(u_n) = \ln(\ln n) - \dfrac{\alpha}{\beta} \ln n$

$$= \ln n \cdot \left(\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} - \frac{\alpha}{\beta} \right)$$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$

donc en posant $x = \ln n$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = +\infty \times \Big(0 - \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{>0}\Big) = \boxed{-\infty}$

Comme $u_n = e^{\ln u_n}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

D'autre part $\dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\dfrac{\ln n}{n^{\alpha/\beta}}\right)^\beta = u_n{}^\beta$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0^\beta = \boxed{0}$ car $\beta > 0$

Cette fois $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln n)^\beta = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty$

on ne peut donc pas raisonner par quotient de limites car on obtient la forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

2.(a) Comme $a > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = \dfrac{0}{+\infty} = \boxed{0}$

Si $\alpha = 0$, $n^\alpha = 1$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$

2.(b) Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$

et $\ln(u_n) = \alpha \ln n - n \ln a = n.\left(\alpha \frac{\ln n}{n} - \ln a\right)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(u_n) = +\infty.\left(0 - \underbrace{\ln a}_{>0 \text{ car } a>1}\right)$

$= -\infty$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ ie $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0}$

3.(a) Si $-1 < a < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$ (car $n! \geq n$)

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{0}{+\infty} = \boxed{0}$

Si $a = 1$, $a^n = 1$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$

Si $a = -1$, $|a^n| = 1$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a^n}{n!}\right| = 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = \boxed{0}$

3.(b) $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a \times a \times \dots \times a}{n \times (n-1) \times \dots \times 1}$

$$= \frac{a}{n} \times \left(\frac{a}{n-1} \times \dots \times \frac{a}{\lfloor a \rfloor + 1} \right) \times \left(\frac{a}{\lfloor a \rfloor} \times \dots \times \frac{a}{1} \right)$$

or $a \leq \lfloor a \rfloor + 1$

donc si $k \in [\![\lfloor a \rfloor + 1, n-1]\!]$, $1 < a < k$

donc $0 < \dfrac{a}{k} \leq 1$

donc $0 < \dfrac{a}{n-1} \times \dots \times \dfrac{a}{\lfloor a \rfloor + 1} \leq 1$

par produit d'inégalités positives.

d'autre part si $k \in [\![1, \lfloor a \rfloor]\!]$, $k \geq 1$ donc $\dfrac{1}{k} \leq 1$

donc $\dfrac{a}{k} \leq a$ $(a > 0)$

donc $\dfrac{a}{\lfloor a \rfloor} \times \dots \times \dfrac{a}{1} \leq \underbrace{a \times \dots \times a}_{\lfloor a \rfloor \text{ termes}} = a^{\lfloor a \rfloor}$

par produit d'inégalités positives.

Finalement : $\boxed{0 < \dfrac{a^n}{n!} \leq \dfrac{a}{n} \times a^{\lfloor a \rfloor}}$

Finalement, le théorème des gendarmes donne :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$$

3.(c) Si $a < -1$ alors $|a| > 1$

et $\left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après 3 (b)

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$

4. Si $n \geq 1$: $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}\right)$

mais si $k \in [\![2, n]\!]$, $0 < \frac{k}{n} < 1$

donc $0 < \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n} < 1$

donc $\boxed{0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}}$

D'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0}$